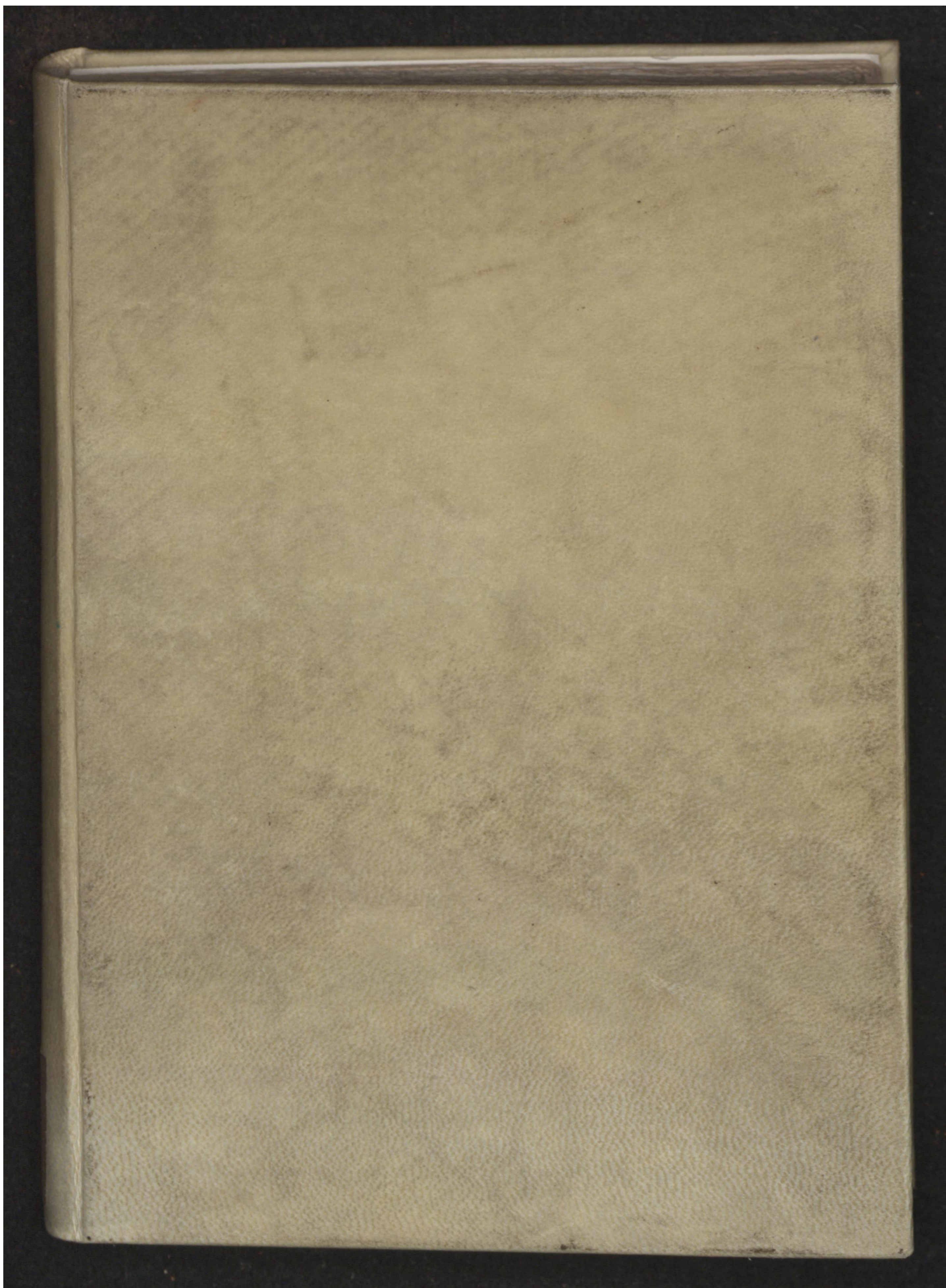
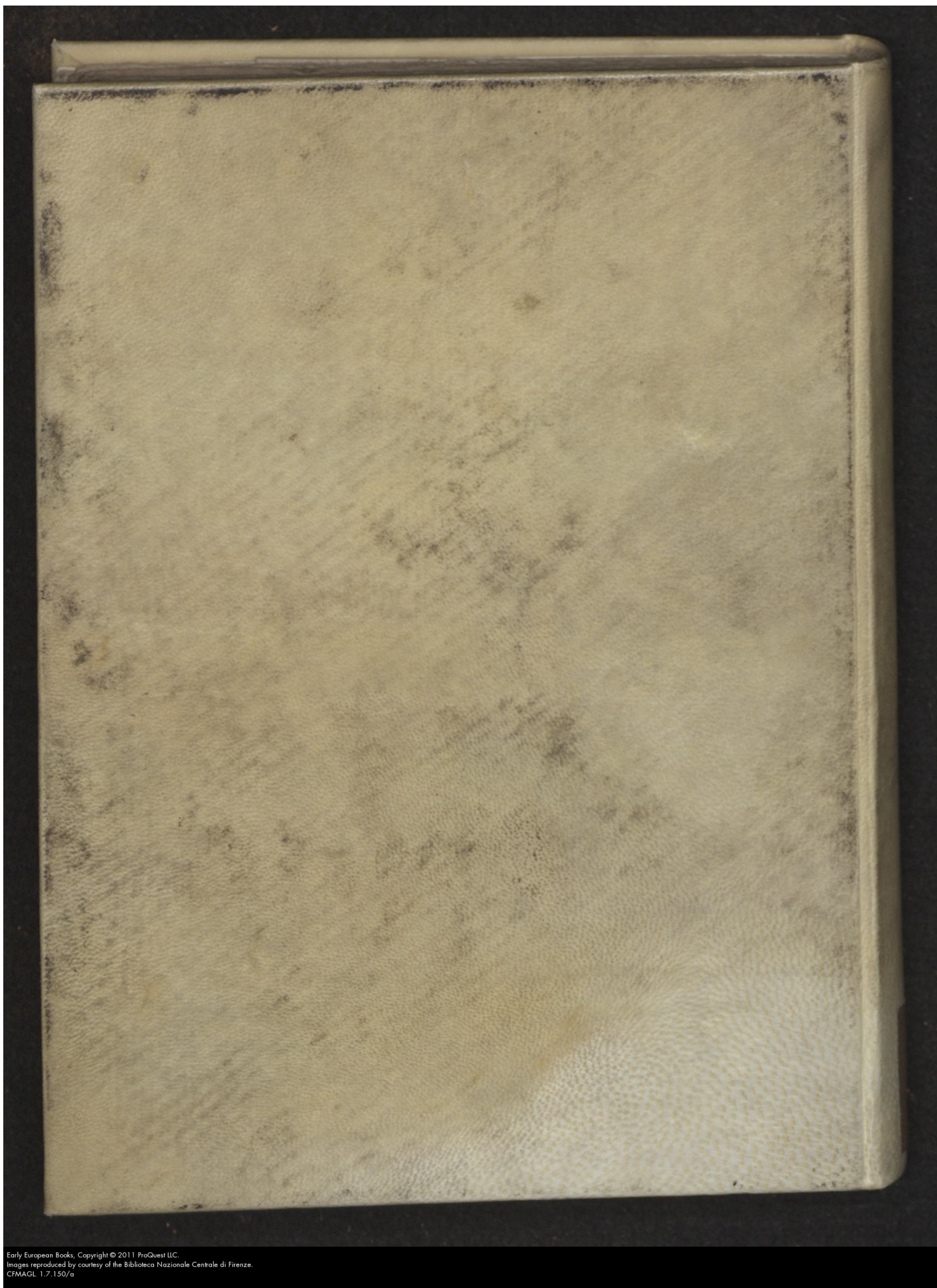



1
7
150









# VERA CIRCVLI
## Et Hyperbolæ Quadratura
*CVI ACCEDIT*
## GEOMETRIA
PARS VNIVERSALIS
Inseruiens quantitatum Curvarum transmutationi & mensuræ.

*AVTHORE*
IACOBO GREGORIO
ABREDONENSI SCOTO.

*CVM PRIVILEGIO SERENISS. SENATVS VENETI.*








PATAVII, Typis Heredum Pauli Frambotti Bibliop.
*Superiorum Permissu*, 1668.

2

*ILLVSTRISS. ATQ; PRÆSTANTISS. VIRO*

# IOANNI MICHAELI PIERVCCIO

In Academia Pataüina Iuris Prudentiam è Prima Sede Profitenti.

*Petrus Maria Frambottus felicitatem præcatur.*



Nter præclaras animi dotes, eximiasque virtutes, quibus affluere cuicunque videris Illustrissime Vir, ea profectò spectabilis, ac summopere commendabilis est, qua studijs bonarum artium, atque disciplinarum addictos amore prosequeris, totisque viribus patrocinio foues, atque tueris. Quamobrē cùm primùm singularem, ac multiplici doctrinæ genere præstantem Iacobum Gregorium huius Tractationis Auctorem per spectum habuisti; ad necessitudinem tibi statim adiungens, consuetudine, familiaritateque coniunxisti. Hic porrò cuiusmodi te effinxerit natura cognoscens, nimirum indole præstanti, moribus suauissimis, pietate summa, ingenii alacritate, eruditione uberrima, & vt paucis perstringam, Virum vndequaque spectabilem, præclarissimis, amplissimisque te laudibus, ut par erat extollens, commendabat in primis eam, qua polles beneuolentiam, præcipuamq; clementiam, ac lenitatem, & velut officij plenum te semper admirabatur. Quo non semel id vsurpabat in te videlicet elucere nobile, præstantissimumque decus omnigenæ disciplinæ, præsertim Iuris Prudentiæ, quam è Prima Sede Profitentem, hęc te veneratur celebris Academia, non magis, quàm excelsæ virtutis mores conformantis, ornamentum, luculenter aduertens in te demum aliquid extitisse loci pudori,

probitati, atque virtuti, quod in ſingulos dies confirmatum acceptimus. Quamobrem tot Magnatum, ac Principum ſublimioris ordinis cumulatiſſimam gratiam, haud ſine multorum admiratione quidē inijſti; & quàm frequenter accerſitus, eosq; adire coactus tam præclara præſtiſti; vt auxerit præſentia famam, qui propterea te adeo illexerunt, vt vix te huc rediturum ſinerent, magis exiſtimantes, ut opinor iucundiſſimam conſuetudinem tuam, eruditiſſima eloquia, ſuauiſſimoſque congreſſus, quàm voluptates omnes, rati profecto deinceps maiori cum fęnore tuâ operâ uti poſſe. Si quid igitur vnquam prudenter egi, hoc equidem, commemorati ſcilicet Auctoris haſce lucubrationes, tuo nomini conſecraſſe. Id enim, qua eum tibi adſtrinxeras conſuetudo, & ſingularia animi tui decora petebant, eo vel maximè quòd Mathematicis quoq; diſciplinis quando vacat operam impendis; nec illud ſit in poſtremis me ſcilicet habere cui pluſquàm tibi debeam, neminem, ob non vulgaria, quibus à te ſum humaniſſimè beneficia affectus. Reliquum igitur eſt Illuſtriſs. Vir, ut hilari animo, ſerenaque fronte munus, quamuis exiguum excipias, quod utique mihi ſperandum, cùm te non prætereat illud Homeri ex Odyſs. 6.

Οὐ γὰρ καλὸν ἀνήνασθαι δόσιν ἐςὶν

donum ſcilicet reiicere haudquaquam decet, quamuis enim exiguum, pluribus tamen nominibus opportunum. Quod ſi perſpexero tibi gratum fuiſſe, dabo quidem operam in poſterum omni ſtudio, omnique conatu, ut intelligas nil in delicijs magis mihi contingere, quàm tibi quidem inuiſum non eſſe. Viue Neſtoreos annos incolumis, ut bonis artibus, ac diſciplinis præſidio ſis, & ornamento.

*Batauij, Anno à Virginis Partu MDCLXVIII. pridie Kal. Sept.*

# LECTORI
## Geometræ Salutem.



*Ecum aliquandò cogitabam, amice Lector, num Analytica cum ſuis quinque operationibus eſſet ſufficiens, & generalis methodus inueſtigandi omnes quantitatū proportiones, ut in initio ſuæ Geometriæ affirmare videtur Carteſius; ſi enim ità eſſet, poſsibile foret eius ope toties decantatam circuli quadraturam exhibere: cumq; hæc mente reuoluerem, facilè percepi ex hactenus repertis circuli proprietatibus nullam poſſe analyſin inſtitui tali ſtructuræ inſeruientem: deinde mihi alias quærenti incidit in mentem huius ſecunda, prima enim in circulo vulgo eſt cognita: ex hiſce percepi ſeriem polygonorum conuergentem, cuius terminatio eſt circuli ſector; vbi ſtatim vidi aliquod analyſios veſtigium. deindè ſerierum conuergentium naturis non ſolum in facilioribus quibuſdam caſibus, ſed etiam in genere conſideratis, & prædictis circuli proprietatibus ad ellipſim & hyperbolam nullo negotio reductis, infallibilis mihi videbatur omnium ſectionum conicarum quadratura: dum autem me illuc conuerti vt polygonorum ſeriem conuergentem terminarem, inſuperabilem difficultatem in eius terminatione inuenienda poſt omnes artis & aleæ conatus deprehendi: Sed animo reuoluens analyſios officium eſſe ſicut algebræ communis, non ſolum problemata reſoluere, ſed etiam eorum impoſsibilitatem (ſi*

opus ſit) demonſtrare; cumque in primo difficultatem indicibilem expertus eßem, ad ſecundum me conuerti, quod certè ſuprà votum ſucceſcit; non enim ſolius circuli (quam mihi ab initio propoſueram) ſed omnium ſectionum conicarum veram & legitimam in ſua proportionum ſpecie quadraturam, & integram proportionis ſpeciem ante incognitam orbi Geometrico patefacio, quam etiam proportionem ſaltem in relatione ad dimenſionem ſectionum conicarum ad commenſurabilem veræ quam proximam reduco, praxi facili, demonſtrabili, & extractione radicis ſurdeſolidæ (ni fallor) multo breuiore; in omni enim proportione incommenſurabili ad tales approximationes recurrunt Mathematici: vt autem melius concipiamus huius proportionis naturam, loquamur de proportione quatenus ortum habet à quinque operationibus analyticis, ſeu arithmeticæ vulgaris, proportio enim nobis notior eſt in numeris ſeu in quantitate diſcreta, quam in continua, neque vereor poſt Carteſium has operationes in geometriam adducere. Primò itaque ſciendum eſt nos ſemper nobis proponere quantitates commenſurabiles, ſeu quæ inter ſe ſunt vt numerus ad numerum; proportionem enim incommenſurabilem niſi relatiuè ad commenſurabilem nullo modò percipimus, habet enim in ſe neſcio quid infiniti, mentem noſtram obtundens & ſimplicem perceptionem impediens: deindè ex illis quinque operationibus arithmeticis, duæ ſunt tantum ſimplices, additio & ſubſtractio; multiplicatio enim eſt compoſita ex additione, & diuiſio ex ſubſtractione; & extractio radicum, quæ in genere nihil aliud eſt quam inuentio proportionis commenſurabilis, quæ quam proximè accedit ad proportionem analyticam in-

com-

*commensurabilem, componitur ex præcedentibus quatuor; & nostra sexta operatio quæ in genere nihil aliud est quam inuentio proportionis commensurabilis, quàm proximè accedentis ad nostram proportionem non analyticam, componitur ex prioribus quinque. Aduertendum quoque est sicut numeri fracti nunquam procedunt ex integrorum additione, subductione, multiplicatione, sed tantum ex diuisione; & numeri incommensurabiles nunquam procedunt ex commensurabilium additione, subductione, multiplicatione, diuisione, sed tantum ex radicum extractione; ità numeros, vel quantitates non analyticas nunquam prouenire ex analyticarum additione, subductione, multiplicatione, diuisione, radicum extractione, sed ex sexta hac operatione; ità vt hæc nostra inuentio addat arithmeticæ aliam operationem, & geometriæ aliam rationis speciem, idem enim est (sicut in hoc tractatulo demonstro) rationem circuli ad diametri quadratum in analytica seu illa rationis specie hactenus cognita exhibere, ac rationem inter quadrati latus & eiusdem diametrum in commensurabilibus: verum certè est me hanc demonstrationem integram ad phrasem geometricam non reduxisse, nam vt hoc perficiatur, opus est non paruo volumine de quantitatum analyticarum mutuo inter se relatione & incommensurabilitate in genere, quod miror nullum vnquam scripsisse, cum in his tàm late pateant inuentionum campi; nam ex his petenda est demonstratio, quod mesolabium non possit perfici ope regulæ & circini, item quod non semper & quando æquationes affectæ possunt reduci ad puras, item quod necessaria sit ad minimum talis generis curua ad mechanicam talium æquationum*

re-

4

*resolutionem, cum talibus innumeris, quæ à præstantioribus geometris impossibilia esse deprehenduntur ex analysi, & à rudioribus quotidiè & frustra quæruntur. Scripsit Euclides decimum suum librum solummodo (nisi in paucis quibusdam propositionibus generalibus) de incommensurabilitate facta ab extractione radicis quadratæ; neque quantum scio ab vllo alio tractata est hæc materia, etiamsi geometriæ speculatiuæ non solum vtilissima sit, sed etiam maximè admirabilis; in ipso enim limine admiranda occurrunt theoremata; e.g. Si fuerit progressio geometrica cuius vnus terminus fuerit propositæ quantitati commensurabilis longitudine vel potestate quacunque, & alius quilibet, binomium, trinomium, &c. quodcunque, impossibile est duos totius progressionis terminos in infinitum continuatæ esse inter se commensurabiles longitudine vel potestate quacunque: alia multa possem afferre, sed pro commodiore fortassis tempore hæc reseruo, satis existimans pro præsenti hæc analyticè demonstraße; etsi enim analysis assensum adeò violenter non cogat ac geometria, nunquam tamen respuit nec respuere potest geometria, quod probauit semel analysis geometrica. ex hac inuentione deduco quoque nouam sectionem angularium & logorithmorum doctrinam, facilem quidem, in praxi expeditissimam & geometrica demonstratione munitam; hactenus enim logorithmorum constructio prolixissima, coniectura potius quam scientia videbatur, & diuisio anguli in partes æquales vltra quinque numero primo numeratas in praxim vix admitti poterat. hæc omnia summa (qua possum) breuitate & perspicuitate demonstro; neque scrupulosus sum in citationibus, vtpotè peregrinus & libris*

ad

ad tale opus destitutus, te enim suppono in geometricis non mediocriter versatum, alioquin nullum hinc fructum colliges restat. ut te admoneam me summam semper affectare in demonstrando generalitatem, non solum in his sed etiam in aliis à me editis; ita ut admirer R.P. Franciscum Eschinardum è Societate Iesu in suo Dialogo optico Pag. 26. affirmare me demonstrasse in optica mea promota, quod imago in eodem videatur angulo ex vertice emersionis quo uisibile ex vertice incidentiæ, solummodo in lentibus ellipticis & hyperbolicis, nam nõ solum in illo, sed etiam in omnibus meis theorematis præcipuis è quibus tota deducitur opticæ scientia nẽpe 26. 27. 44. 45. 46. 47. 50. nihil dico nec suppono de ulla particulari figura sicut cuiuis legenti patebit, extat enim exemplar Romæ in Bibliotheca Augustiniana. Verùm certè est in problematis me semper adhibere lentes, & specula elliptica, & Hyperbolica, quippe exacta et geometriæ conformia, & in hoc allucinatur R. Vir quod problema à theoremate non distinxerat, nam in suo dialogo, ne grauius dicam, nullum extat problema. Illud quoque quod asserit pag. 54. veritati vix consentit, quod librum meum tum primum viderat dum proprium illius opusculum esset ferè sub prælo, octo enim Mensibus ante absolutam sui dialogi impressionem meum apud se habuit, sicut testantur omnes in Romano Scotorum collegio tunc studiosi, ubi ipse erat præfectus. doleo certè quod vir alioquin doctus pulchram opticæ scientiam fœdis sui dialogi erroribus disfiguret; nam in ipsa imaginis natura, quam tot argumẽtis conatur probare se inuenisse ante uisa mea scripta, turpiter alucinatur, dum imaginem distinguit à foco tan-

6

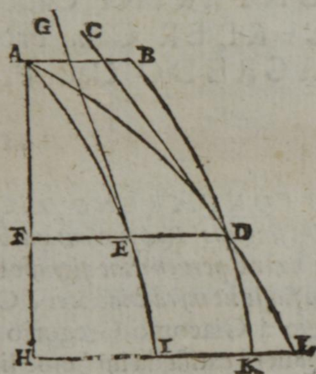
ta rationum philosophicarum farragine; in ipso enim casu ab illo exhibito, focus est vera, & legitima imago lentis obiectiuæ, quod sensui apparebit, si in lente obiectiua pingantur literæ, earum enim imagines videbuntur clarissime depictæ in foco vbi aßeritur nullam existere imaginem, sed tantum focum; undè patet nòn eße heterogeniorum mixtionem (sicut asserit Ille) sed lentis obiectiuæ homogeneitatem, quæ efficit illam foci homogeneitatem: deinde pag. 36. negat radios in hyperbolæ focum exteriorem concurrentes axi vnquam fuisse parallelos, etiamsi à Cartesio firmissimè sit demonstratum; & pag. 22. magnopere prædicat ingentem illam difficultatem cognoscendi, quomodò de visibilis magnitudine iudicet sensus communis; etiamsi ab omnibus doctioribus opticis (ni fallor) demonstratum & receptum sit, dum distantia percipitur, sensum communem iudicare (sicut docet trigonometria) ex distantia et angulo visorio, quæ si non percipiatur, sensum communem iudicare ex quantitate solius anguli uisorij, seu imaginis in retina, hæc enim necessario coincidunt, si detur oculi centrum in eodem semper loco existens, quod ab omnibus supponitur. de his autem paulò liberius locutus sum, ut hinc admoneam mathesios studiosos, quam vanus sit conatus mathemathica promouere ope fictilium rationum phylosophicarum, quæ crudeli vulgi turmæ persuadendæ tantum sunt vtiles; in Mathematicis enim nulla logica præter geometriam, nec philosophiæ quæ huius ope infallibilibus experientijs non superstruitur. Vale.

Ani-

*Animaduerto Prop. 5. Secundæ Partis proposito nostro obscurè admodum inseruire, & ideo sequentem in eius loco substituo.*

*PROP. 5. THEOREMA.*

Ad rectam A H ducantur duæ curuæ A I, A L; sitque H I L recta perpendicularis rectæ A H: dico impossibile esse, vt (ducta ad libitum recta F E D perpendiculari rectæ A H) rectæ tangentes G E, C D, semper sint parallelæ. Sumatur in recta I L punctum ad libitum K, sitque rectæ I K æqualis & parallela recta A B; deinde per puncta B, K, ducatur curua congruens curvæ A I, si modo punctum *A* superponatur puncto




B & punctum I puncto L: manifestum est curvam BK secare curvam AL in aliquo puncto v. g. D; si igitur GE, CD, sunt parallelæ, CD tanget curvam B D K in puncto D ob curvarum A I, B K, congruentiam: sed C D ex suppositione tangit quoque curvam A L. quod est absurdum, quoniam curvæ A L, B K, se mutuo secant in puncto D; tangentes igitur G E, C D, non sunt semper parallelæ, quod demonstrandum erat.

*In partis secundæ pag.* 20. *lin.* 5 *.pro* & demonstrabitur *lege* & semper demonstrabitur. *Cætera errata, cum sensum non perturbent, facilè corriget intelligens Lector.*

NOI

# NOI REFORMATORI
## dello Studio di Padoua.

HAuendo veduto per fede del Padre Inquisitore di Padoua nel Libro intitolato *Vera Circuli, & Hiperbolæ Quadratura*, non esserui cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica; e parimente per attestato del Segretario nostro, niente contro Prencipi, e buoni costumi, concedemo licenza à gl'Heredi di Paolo Frambotti di poterlo stampare, osseruando gl'ordini, &c.

*Dat. à 7. Aprile 1668.*

(ALVISE CONTARINI Cau. Proc. Ref.
(ANGELO CORRER Cau. Proc. Ref.
(NICOLO SAGREDO Cau. Proc. Ref.

*Angelo Nicolosi Segr.*

*DOMINICVS CONTARENO Dei Gratia Dux Venet. &c. Vniuersis, & singulis Rappræsentantibus nostris quibuscumque ad quos hæ nostræ peruenerint significamus hodie in Consilio nostro Rogatorum captum fuisse ut infrà videlicet.* Che per effetto di gratia sia concesso priuilegio à Giacomo Gregorio Abredonense Scoto, che altri, che lui, ò chi hauerà causa da lui (cioè li Frambotti) per dieci anni non possa far stampar il Libro intitolato. *Vera Circuli, & Hyperbolæ Quadratura, & Geometriæ pars Vniuersalis inseruiens quantitatum Curuarum transmutationi, & mensuræ*; & stampato non possa alcuno tenerlo, ò venderlo in pena della perdita di tutti gli esemplari, quali siano del sudetto Auttore, e di Ducati trecento applicati, vn terzo all'Accusatore, vn terzo al Mag. ò Reggimento, che farà l'esecutione, & l'altro terzo all'Arsenal nostro, come consigliano li Reformatori dello Studio di Padoua nelle risposte hora lette, douendo massime soccombere à molti dispendij nella stampa dello stesso Libro. *Quarè auctoritate supradicti Consilij mandamus vobis, vt ita exequi debeatis.*

*Dat. in Nostro Duc. Palatio die XIV. Aprilis Ind. 6. M. DC. LXVIII.*

Gio. Giacomo Corniani Segr.

# DEFINITIONES

1 SI in circulo, ellipse vel hyperbola ducantur è in eius perimetrum duæ rectæ, appellamus num ab illis rectis & perimetri segmento comprehensum, sectorem.

2 Si perimetri segmentum inter illas rectas comprehensu. à rectis quotcumque subtendatur, ità vt triangula rectilinea (quorum communis vertex est sectionis centrum & bases rectę subtendentes) sint ęqualia; vocamus rectilineũ illud ab istis triangulis conflatum, polygonum regulare insciptum, si sectio conica fuerit circulus vel ellipsis; quod si fuerit hyperbola, vocamus illud rectilineum polygonum regulare circumscriptum.

3 Si perimetri segmentum inter illas rectas comprehensum à rectis quotcunque tangatur & à tactibus ad sectionis centrum ducantur rectæ; si inquam omnia trapezia, à tangentibus proximis & rectis ad centrum cõprehensa, fuerint æqualia; appello rectilineum ab illis conflatum, polygonum regulare circumscriptum, si sectio conica sit ellipsis vel circulus, & polygonum regulare inscriptum si fuerit hyperbola.

4 Si omnes anguli (excepto illo ad sectionis centrum) polygoni regularis à subtendentibus comprehensi insistant omnibus contanctum punctis polygoni regularis à tangẽtibus comprehensi, appello hęc polygona complicata.

5 Quantitatem dicimus à quantitatibus esse compositam, cum à quantitatum additione, subductione, multiplicatione, diuisione, radicum extractione, vel quacunque alia imaginabili operatione, fit alia quantitas.

6 Quandò quantitas componitur ex quantitatum additione, subductione, multiplicatione, diuisione, radicum extractione; dicimus illam componi analyticè.

7 Quandò quantitates à quantitatibus inter se commensurabilibus analyticè componi possunt, dicimus illas esse inter se analyticas.

Si à quantitatibus quotcunque A, B, C, D, E, componatur quantitas X, & à quantitatibus F, G, C, D, E, componatur quantitas Z, eâdem omninò methodo & ijsdem omnino operationibus quibus antè componebatur X, positis quantitatibus F, G, loco quantitatum A, B, si inquam hoc fiat, dicimus quantitatem X eodem modo cõponi à quantitatibus A, B, quo Z componitur à quantitatibus F, G.

Sint duæ quantitates A, B, à quibus componantur duæ aliæ quantitates C, D, quarum differentia sit minor differentia quantitatum A, B, & eodem modo quo C, componitur à quantitatibus A, B, componatur E à quantitatibus C, D; & eodem modo quo D componitur à quantitatibus A, B, componatur F, à quantitatibus C, D; & eodem modo quo E componitur à quantitatibus C, D, vel C à quantitatibus A, B, componatur G à quantitatibus F, E; & eodem modo quo F componitur à quantitatibus C, D, vel D à quantitatibus A, B, componatur H à quantitatibus E, F; atque ità continuetur series: appello hanc seriem, seriem conuergentem.

| | |
|---|---|
| A | B |
| C | D |
| E | F |
| G | H |

10 Eius termini iuxta se positi nempè A, B, vel C, D, vel E, F, vel G, H, dicuntur termini conuergentes.

## PETITIONES.

1 Petimus quantitates, a quantitatibus datis inter se analyticis analyticè compositas, esse inter se & cum quantitatibus datis analiticas.

2 Item quantitates, quæ a quantitatibus datis inter se analyticis non possunt analyticè componi, non esse cum quãtitatibus datis analiticas.

Præcedentes petitiones quibusdam fortassis obscuræ videbuntur, sed tamen ex analyseos elementis sunt satis manifestæ.

Vera

# Vera CIRCVLI ET HYPERBOLÆ Quadratura.

Sit circuli, ellipseos vel Hyperbolæ segmentum BIP cuius centrum A: compleatur triangulum ABP, & segmentum in punctis, B, P, tangentes ducantur rectæ BF, PF, se inuicem secantes in puncto F; producatur (si opus sit) recta AF segmentum intersecans in puncto I & rectam BP in puncto Q; deindè iungantur rectæ BI, PI.

## PROP. I. THEOREMA.

*Dico trapezium* BAPI *esse medium proportionale inter trapezium* BAPF, *& triangulum* BAP.

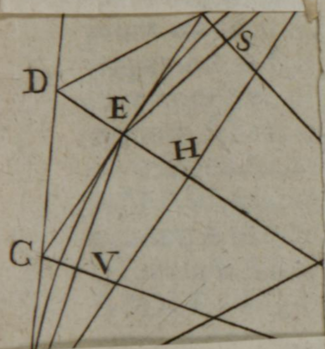
QVoniam recta AQ ducitur per F concursum duarũ rectarum FB, FP, segmentum in punctis B, P, tangentiũ; igitur recta AQ rectam BP contactuũ puncta iungentem bifariam secabit in puncto Q; & proindè triangulum ABQ est æquale triangulo AQP, & triangulum FBQ triangulo FQP; & igitur triangulum ABF æquale est triangulo APF; est ergò triangulum ABF dimidium trapezii ABFP: eodem modo probatur triangulum ABI esse dimidium trapezii ABIP; & triangulum ABQ est dimidium trianguli ABP: cumque triangula ABF, ABI, ABQ, eandem habeant altitudinem, inter se sunt vt bases, sed eorum bases nempe AF, AI, AQ, sunt continuè proportionales; & igitur ipsa quoque triangula sunt continuè proportionalia; & proinde eorum dupla nimirum trapezia ABFP, ABIP, & triangulum ABP sunt continuè proportionalia in ratione AF ad AI, quod demostrare oportuit.

Deducatur recta DL segmentum tangens in puncto I, & rectis BF, PF, occurrens in punctis D, L, ità vt compleatur polygonum ABDLP:

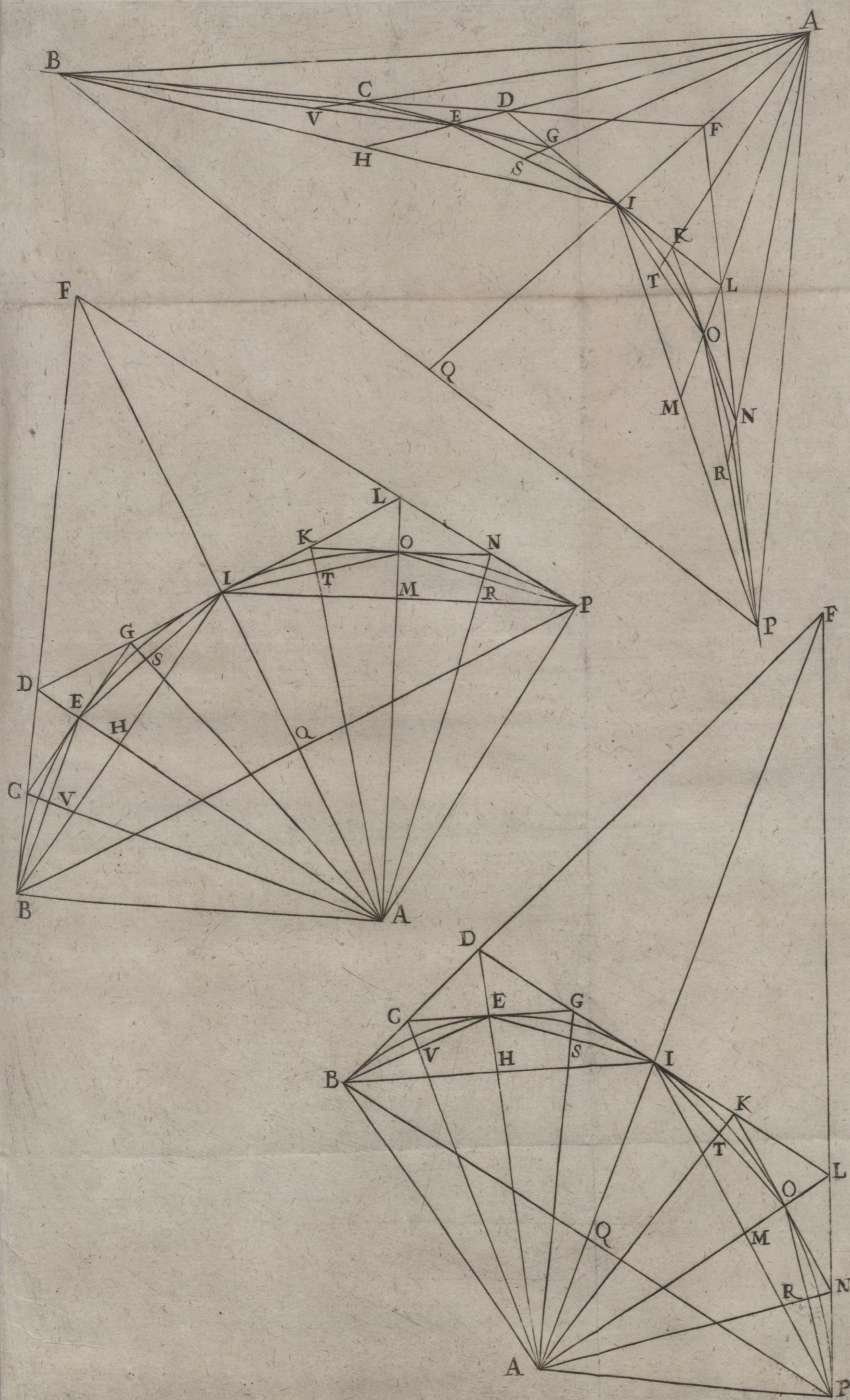
## PROP. II. THEOREMA.

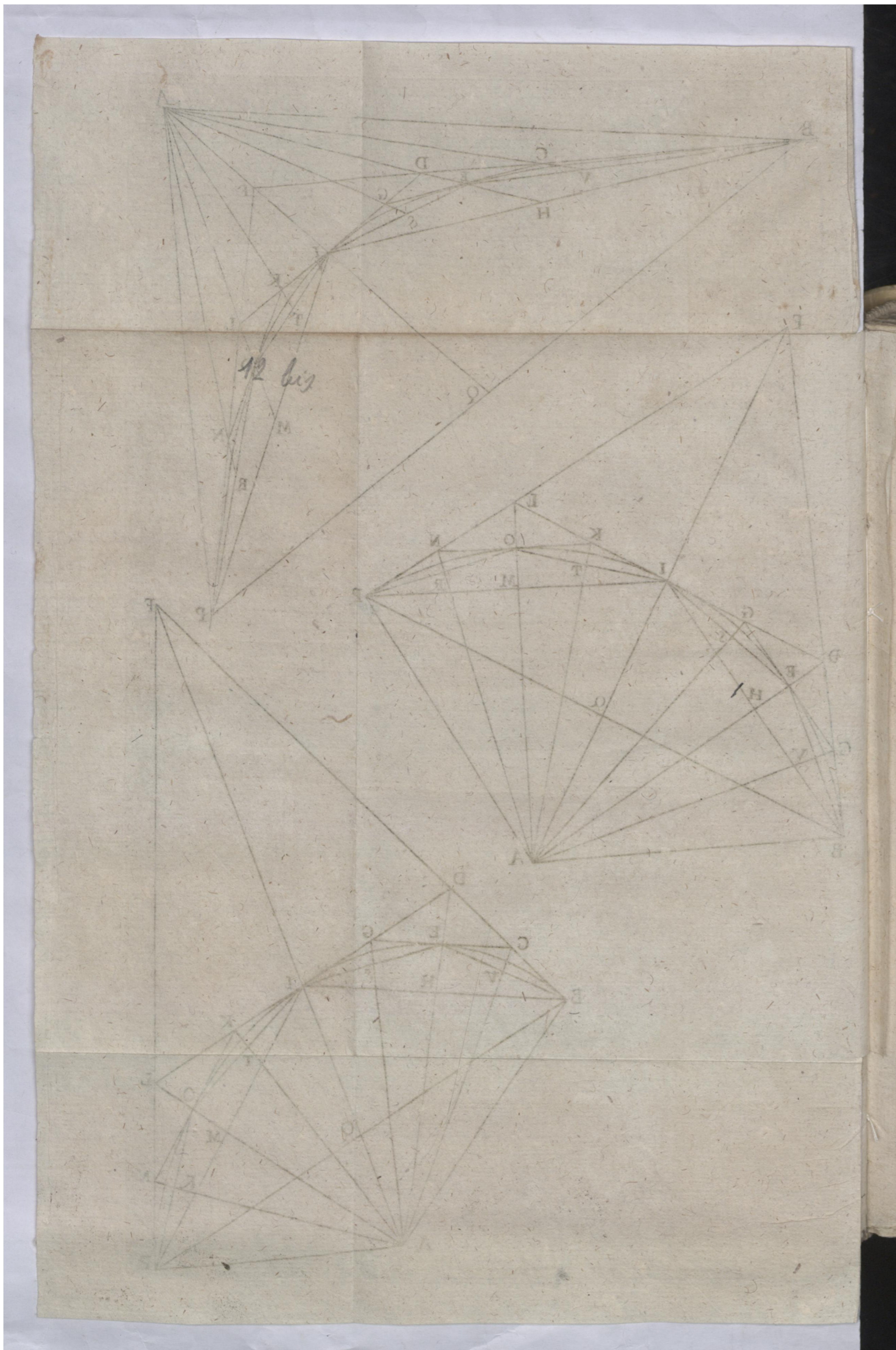
*Dico trapezia* ABFP. ABIP *simul, esse ad duplum trapezij* ABIP, *sicut trapezium* ABFP *ad polygonum* ABDLP.

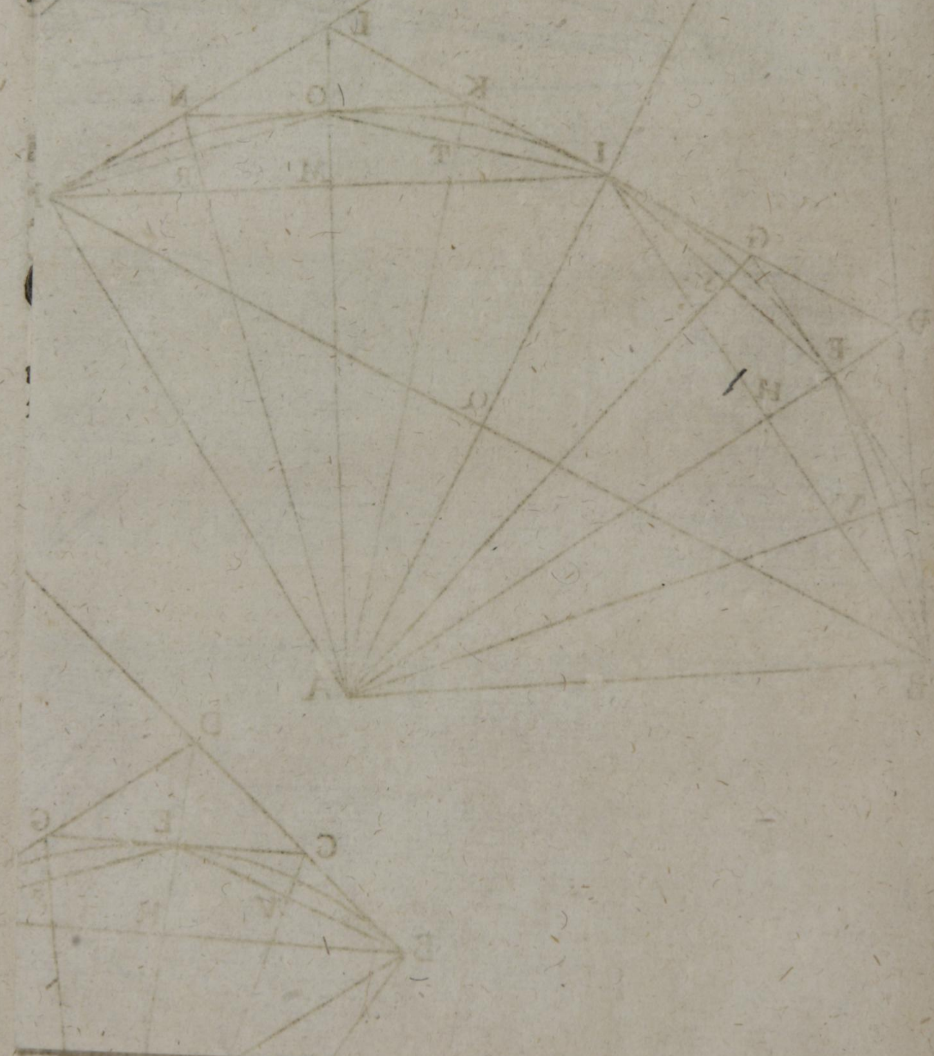
QVoniam recta AF, ducta per contactum rectæ DL cum segmento, ducitur etiam per concursum duarum rectarum FB, FP, rectam DL terminantium & segmentum in duobus punctis tangentium; igitur recta DL bifariam secatur in puncto I; & proindè triangulum FDI æquale est triangulo FIL, at triangulum ABF æquale est triangulo APF; & igitur trapezium ABDI æquale est trapezio APLI; trapezium ergò APLI dimidium est polygoni ABDLP. ducatur recta AL: manifestum est ex præcedentis demonstratione triangulum AIL esse æquale triangulo ALP; sed vt triangulum ALF ad triangulum ALI ità FA ad AI, & vt FA ad AI ità trapezium ABFP ad trapezium ABIP; & igitur vt trapezium ABFP ad trapezium ABIP; ità triangulum ALF ad triangulum ALI; & componendo, vt trapezia ABFP, ABIP simul, ad trapezium ABIP, ità triangulum AFL & triangulum AIL simul, hoc est triangulum AFP, ad triangulum AIL: & consequentes duplicando, vt trapezia ABFP, ABIP simul, ad duplum trapezii ABIP, ità triangulum AFP, ad trapezium AILP: at triangulum AFP est dimidium trapezii ABFP, & trapezium AILP est dimidium polygoni ABDLP; & igitur vt trapezia ABFP, ABIP simul, ad duplum trapezii ABIP, ità trapezium ABFP ad polygonum ABDLP, quod demonstrare oportuit.




Ex huius prima manifeſtum eſt trapezium A I L P, trapezium A I O P & triangulum A I P eſſe conti-


A
B
C
D
V
E
F
G
H
S
I
K
T
L
O
Q
M
N
R
P
F
L
K
O
N
I
T
M
R
P
G
D
S
E
H
Q
C
V
B
A
D
E
G
C
V
H
S
I
B
K
T
L
O
Q
M
R
N
A
P
F


12 bis




PROP.

## PROP. III. THEOREMA.

*Dico triangulum* BAP, *& trapezium* ABIP *ſimul, eſſe ad trapezium* ABIP, *vt duplum trapezij* ABIP *ad polygonum* ABDLP.

IN antecedente demonſtratum eſt trapezia ABFP, ABIP ſimul, eſſe ad duplum trapezii ABIP, ſicut trapezium ABFP ad polygonum ABDLP: & permutando trapezia ABFP, ABIP ſimul, ſunt ad trapezium ABFP, vt duplum trapezii ABIP ad polygonum ABDLP. & quoniam trapezium ABFP, trapezium ABIP & triangulum ABP, ſunt continuè proportionalia; erit trapezium ABIP ad trapezium ABFP, vt triangulum ABP ad trapezium ABIP; & componendo, vt trapezia ABIP, ABFP ſimul, ad trapezium ABFP, ità triangulum ABP & trapezium ABIP ſimul, ad trapezium ABIP: erat autem, vt trapezia ABIP, ABFP, ſimul, ad trapezium ABFP, ità duplum trapezij ABIP ad polygonum ABDLP; & igitur vt triangulum ABP & trapezium ABIP ſimul, ad trapezium ABIP, ità duplum trapezii ABIP ad polygonum ABDLP, quod demonſtrare oportuit.

Producantur (ſi opus ſit) rectæ AD, AL, ſegmentum ſecantes in punctis E & O, & rectas BI, IP, in H & M: deindè iungantur rectæ BE, EI, IO, OP, vt compleatur polygonum ABEIOP.

## PROP. IV. THEOREMA.

*Dico polygonum* ABEIOP *eſſe medium proportionale inter polygonum* ABDLP *& trapezium* ABIP.

EX huius prima manifeſtum eſt trapezium AILP, trapezium AIOP & triangulum AIP eſſe conti-

continuè proportionalia, & ex prædictis satis facilè colligi potest trapezium AILP esse dimidium polygoni ABDLP & trapezium AIOP esse dimidium polygoni ABEIOP & triangulum AIP esse dimidium trapezii ABIP: & proindè terminos duplicando, polygonum ABDLP, polygonum ABEIOP & trapezium ABIP sunt continuè proportionalia, quod demonstrare oportuit.

Ducantur rectæ CG, KN, segmentum tangentes in punctis E, O, & rectis DL, DB, LP, occurrentes in punctis C, G, K, N, vt compleatur polygonum ABCGKNP.

## PROP. V. THEOREMA.

*Dico trapezium* ABIP *&* *polygonum* ABEIOP *simul, esse ad polygonum* ABEIOP, *vt duplum polygoni* ABEIOP *ad polygonum* ABCGKNP.

Ex huius tertia manifestum est triangulum ABI & trapezium ABEI simul, esse ad trapezium ABEI, vt duplum trapezii ABEI ad polygonum ABCGI: & ex prædictis facilè concludi potest triangulum ABI esse dimidium trapezii ABIP, & trapezium ABEI esse dimidium polygoni ABEIOP, & polygonum ABCGI esse dimidium polygoni ABCGKNP; & proindè terminos duplicando, trapezium ABIP & polygonum ABEIOP simul, erunt ad polygonum ABIOP vt duplum polygoni ABEIOP ad polygonum ABCGKNP, quod demonstrandum erat.

Hinc facilè colligi potest polygonum ABCGKNP esse medium harmonicum inter poligona ABEIOP, ABDLP, quod hic admonuisse sufficiat, in sequentibus enim demonstrabitur.



SCHO-

# SCHOLIVM.

DVæ præcedentes propoſitiones eodem modo demonſtrari poſſunt de duobus quibuſcunque polygonis complicatis loco polygonorum complicatorum ABIP, ABDLP; polygonum enim à tangentibus comprehenſum tot cōtinet æqualia trapezia, quot continet polygonum à ſubtendentibus comprehēſum æqualia triangula: atque hinc euidens eſt itas polygonorũ analogias ità ſe habere in infinitum, ducendo nimirum rectas AN, AK, AG, AC, per puncta R, T, S, V, & adhuc alia & alia polygona intrà & extrà ſemper ſcribendo: notandũ nos appellare hāc polygonorũ inſcriptionē & circũſcriptionē, inſcriptionē & circũſcriptionē ſubduplā. ex prædictis patet (ſi ponatur triangulum ABP = $a$, & trapezium ABFP = $b$) trapezium ABIP eſſe $\sqrt{q.ab}$ & polygonum ABDLP $\frac{2ab}{a + \sqrt{q.ab}}$: eodem modo poſito trapezio ABIP = $c$, & polygono ABDLP = $d$, erit polygonum ABEIOP = $\sqrt{q.cd}$ & polygonum ABCGKNP = $\frac{2cd}{c + \sqrt{q.cd}}$, ità vt euidens ſit hanc polygonorum ſeriem eſſe conuergentem; atque in infinitum illam continuando, manifeſtum eſt tandem exhiberi quātitatem ſectori circulari, elliptico vel hyperbolico ABEIOP æqualem; differētia enim polygonorum complicatorum in ſeriei continuatione ſemper diminuitur, ità vt omni exhibita quantitate fieri poſſit minor, vt in ſequentis theorematis Scholio demonſtrabimus: ſi igitur prædicta polygonorum ſeries terminari poſſet, hoc eſt, ſi inueniretur vltimum illud polygonum inſcriptum (ſi ità loqui liceat) æquale vltimo illi polygono circumſcripto, daretur infallibiliter circuli & hyperbolæ quadratura: ſed quoniam difficile eſt, & in geometria omninò fortaſſe inauditũ tales ſeries terminare; præmittendæ ſunt quædam propoſitiones è quibus inueniri poſſint huiuſmodi aliquot ſerierum terminationes, & tandem (ſi fieri

poſsit)

possit (generalis methodus inueniendi omnium serierum conuergentium terminationes.

## PROP. VI. THEOREMATA.

*Dico differentiam inter triangulum* ABP *& trapezium* ABFP *maiorem esse duplo differentiæ inter trapezium* ABIP *& polygonum* ABDLP.

SIt triangulum ABP A; trapezium ABFP, B; trapezium ABIP, C, & polygonum ABDLP, D: quoniam A est ad C vt C ad B, igitur vt differentia inter A & C ad A, ità differentia inter C & B ad C; & permutando, vt differentia inter A & C ad differentiam inter C & B ità A ad C; & componendo, vt differentia inter A & C & differentia inter C & B simul, hoc est differentia inter A & B, ad differentiã inter C & B, ità A ✠ C ad C; sed vt A ✠ C ad C ità 2 C ad D, & ideò differentia inter A & B est ad differentiam inter C & B vt 2 C ad D. quoniam A ✠ C est ad C vt 2 C ad D, erit permutando vt A ✠ C ad 2 C ità C ad D; & diuidendo, vt differentia inter A & C ad 2 C ità differentia inter C & D ad D; & permutando, differentia inter A & C est ad differentiã inter C & D vt 2 C ad D; sed demonstratum est differentiam inter A & B esse ad differentiã inter C & B vt 2 C ad D; & proinde differẽtia inter A & B est ad differentiã inter C & B, vt differẽtia inter A & C ad differentiam inter C & D; sed differentia inter A & B est maior differentia inter C & B, & ideò differentia inter A & C est maior differentia inter C & D: & prædictam analogiam permutando, differentia inter A & B est ad differentiam inter A & C, vt differẽtia inter C & B ad differentiã inter C & D; at differentia inter A & B est maior differentia inter A & C, & ideo differentia inter C & B est maior differentia inter C & D; atque differentia inter A & B æqualis est differentijs, inter A & C, inter C & B; cumque earum vtrauis sit maior differentia inter C & D, manifestum est differentiam inter A & B maiorem esse duplo differentiæ

inter

inter C & D, hoc est differentiam inter triangulum A B P & trapezium A B F P maiorem esse duplo differentiæ inter trapezium A B I P, & polygonum A B D L P, quod demonstrare oportuit.

## SCHOLIVM.

EOdem prorsus modo demonstratur differentiã inter trapezium A B I P & polygonum A B D L P maiorem esse duplo differentiæ inter polygonum A B E I O P & polygonum A B C G K N P. denique eodem modo demonstrari potest hic differentiarũ excesus in subdupla nostra polygonorum complicatorum descriptione in infinitum; differentia enim priorum nempè inscripti & circumscripti maior semper erit duplo differentiæ immediatè sequentium nimirum inscripi quoque & circumscripti, & proindè aufertur maius quam dimidium a priorum differentia vt fiat differentia immediatè sequentium; & igitur continuando subduplam polygonorum descriptionem, inueniri possunt duo polygona complicata, quorum differentia sit minor qualibet exhibita quantitate, vt in præcedentis Scholio assumpsimus.

Sint duæ quantitates indefinitæ $a$ minor $b$ maior, sintque datæ duę rationes maioris inequalitatis $c$ ad $d$, & $c$ ad $e$; deindè fit vt $c$ ad $d$ ità $b - a$ ad $\frac{bd - ad}{c}$ cui addatur quantitas $a$ vt fiat $\frac{ca + bd - ad}{c}$, quæ quantitas ponatur immediatè sub $a$, fiatque vt $c$ ad $e$ ità $b - a$ ad $\frac{be - ae}{c}$, quæ quantitas substrahatur ex $b$ & relictum nempè $\frac{bc - be + ac}{c}$ ponatur sub $b$. cõtinuetur deindè series conuergens cuius primi termini conuergentes sunt $a$, $b$, & secundi termini conuergentes $\frac{ca + bd - ad}{c}$, $\frac{bc - be + ae}{c}$.

$$\begin{array}{cccc} & d & & \\ c & e & a & b \\ & & \frac{ca + bd - ad}{c} & \frac{bc - be + ae}{c} \end{array}$$

manifestum est terminum $\frac{ca + bd - ad}{c}$ maiorem esse termino $a$, quo-

niam termino $a$ additur $\frac{bd-ad}{c}$ vt fiat terminus $\frac{ca+bd-ad}{c}$: manifestum quoque est terminum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ minorem esse termino $b$, quoniam differentia inter $a$ & $b$ est ad differentiã inter $a$ & $\frac{ca+bd-ad}{c}$ in ratione maioris inęqualitatis: euidens quoque est terminum $\frac{bc-be+ae}{c}$ minorem esse termino $b$, quoniam ex $b$ substrahitur $\frac{bc-ae}{c}$ vt fiat $\frac{bc-be+ae}{c}$; manifestum etiam est terminum $\frac{bc-be+ae}{c}$ maiorem esse termino $a$, quoniam differentia inter $a$ & $b$ est ad differentiam inter $\frac{bc-be+ae}{c}$ & $b$ in ratione maioris inæqualitatis: euidens igitur est differentiam inter terminos conuergentes $a$ & $b$ maiorem esse differentia inter terminos cõuergentes $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & $\frac{bc-be+ae}{c}$. sed quoniam termini conuergentes $a$ & $b$ ponuntur indefiniti, possunt $a$ & $b$ sumi loco quorumlibet terminorum conuergentium totius huius seriei; & positis $a$ & $b$ pro terminis huius seriei conuergentibus quibuscũque, sequitur necessario ex seriei cõpositione $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ac}{c}$ esse terminos conuergentes immediatè sequentes: cumque differentia terminorum $a$ & $b$ maior sit differentia terminorũ $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & $\frac{bc-be+ae}{c}$, euidens est differentiam terminorum conuergentium priorum semper esse maiorem differentia terminorum conuergentium immediatè sequentium; & igitur quò magis continuatur hæc series conuergens eò minor fit differentia terminorum conuergentium: & quoniam hæc differentiarum deminutio semper fit proportionaliter nempè in ratione $b-a$ ad $\frac{bc-be+ae-ca-bd+ad}{c}$; igitur possunt inueniri huius seriei termini conuergentes quorum differentia sit omni exhibita quantitate minor; & igitur

ima-

imaginando hanc feriem in infinitum continuari, poſſumus imaginari vltimos terminos cõuergentes eſſe ęquales, quos terminos ęquales appellamus feriei terminationem.

## PROP. VII. PROBLEMA.

*Oportet prædictæ feriei terminationem inuenire.*

VT huic problemati ſatisfiat, oportet primò inuenire quantitatem quę eodem modo componitur ex terminis conuergentibus $a, b,$ quo ex terminis conuergentibus $\frac{ca + bd - ad}{c}, \frac{bc - be + ae}{c}$, hoc autem facilè fit hoc modo: inueniatur quantitas quæ multiplicata in $a$ & addita $b$ multiplicata in quantitatem datam $m$, eandem quantitatem facit ac ſi multiplicaretur in $\frac{ca + bd - ad}{c}$ & adderetur $\frac{bc - be + ae}{c}$ multiplicata etiã in eandẽ quantitatem datam $m$. ſit quantitas illa $z$, & proindè $za + bm$ ęquatur $\frac{zca + zbd - zad + mbc - mbe + mae}{c}$, & æquatione reducta inuenitur $z = \frac{mae - mbe}{ad - bd}$; quæ quantitas ſiuè multiplicata in $a$ & addita $mb$, ſiuè multiplicata in $\frac{ca + bd - ad}{c}$ & addita $\frac{mbc - mbe + mae}{c}$ efficit eandem in vtroque caſu quantitatem nempè $\frac{maae - mbae + mbad - mbbd}{cd - bd}$: & proindè prędicta quantitas eodem modo componitur ex terminis conuergentibus $a, b,$ quo componitur ex terminis conuergentibus $\frac{ca + bd - ad}{c}, \frac{bc - be + ae}{c}$. atque $a$ & $b$ quoniam ſunt quantitates indefinitæ poſſunt eſſe quilibet totius feriei termini conuergentes, modò termini conuergentes immediatè ſequentes ſint $\frac{ca + bd - ad}{c}$ & $\frac{bc - be + ae}{c}$; & proindè quantitas $\frac{maae - mbae + mbad - mbbd}{cd - bd}$ eodem modo cõponitur ex quibuſlibet totius feriei terminis conuergentibus quo componitur ex terminis conuergentibus $a, b$; & igitur prædicta quantitas

eodem etiam modo componitur ex vltimis eius terminis cõuergentibus, qui æquales ſunt: ſit vltimus ille terminus $x$ qui multiplicatus in $\frac{mae - mbe}{ad - bd}$ & in $m$ efficit $xm$ & $\frac{xmae - xmbe}{ad - bd}$, quorum factorum ſumma nẽpè $\frac{xmae - xmbe + xmad - xmbd}{ab - bd}$ equatur $\frac{maae - mbae + mbad - mbbd}{ad - bd}$, & equatione reducta inuenitur $x$ ſeù ſeriei terminatio $\frac{aae - bae + bad - bbd}{ae - be + ad - bd}$, quam inuenire oportuit.

Nè minùs exercitatis obſcurum videatur hoc problema; illud in numeris illuſtrabimus: ſit $c\,7$, $d\,2$, $e\,3$, $a\,28$, $b\,42$, erunt ſecundi termini conuergentes $32$, $36$, tertij $33\frac{1}{7}$ $34\frac{2}{7}$, & eius terminatio $33\frac{3}{5}$.

Neminem moueat, quod (etiamſi $a$ ſit minor quam $b$) $\frac{ca + bd - ad}{c}$ poſſit eſſe maior quam $\frac{bc - be + ae}{c}$, analyticè enim maior à minore poteſt ſubſtrahi, cuius tamen exemplum non grauabimur exhibere, ſit $c\,7$, $d\,5$, $e\,4$, $a\,28$, $b\,42$; erunt ſecũdi termini conuergentes $38$, $34$, & tertij $35\frac{1}{7}$, $36\frac{2}{7}$, eiuſq; terminatio $35\frac{7}{9}$.

Animaduertendum eſt huius problematis ſolutionem eodem modo ſe habere, etiamſi loco $a$ ponatur cyphra ſeù merum nihil, Ex Gr; ſit $c\,8$, $d\,3$, $e\,4$, $a\,0$, $b\,24$; erunt ſecundi termini conuergentes $9$, $12$, & tertij $10\frac{1}{8}$, $10\frac{1}{7}$, & ſeriei terminatio $10\frac{2}{7}$.

Harum etiam ſerierum terminationes poſſunt inueniri ex Gregorij a S. Vincentio lib. de progreſſ. geometrica, etiamſi methodo longè ab hac diuerſa.

PROP.

## PROP. VIII. PROBLEMA.

*Sint duæ quantitates datæ A,B, & ratio qualibet data C ad D: oportet inuenire aliam quantitatem, vt ratio eius ad A sit multiplicata rationis B ad A in ratione C ad D.*

EDC AFBG

SIt primò ratio C ad D commensurabilis, sitque inter C & D communis mensura E; & quoties E continetur in D toties sit ratio F ad A submultiplicata rationis B ad A; & quoties E continetur in C toties sit ratio G ad A multiplicata rationis F ad A: dico G esse quantitatem illam quæsitam. ratio G ad ad A est multiplicata rationis F ad A in ratione C ad E, & ratio F ad A est multiplicata rationis B ad A in ratione E ad D; & igitur ex æqualitate, ratio G ad A est multiplicata rationis B ad A in ratione C ad D, quod demonstrare oportuit.

Quod si ratio C ad D sit incommensurabilis, geometricam huius problematis praxem esse impossibilem mihi persuadeo; approximatione tamen fieri potest, assumendo rationem commensurabilem eius loco, quæ quàm proximè ad illam accedat.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | G H | | A B |
| | N | I K | | C D |
| M | | R S | | E F |
| | O | T V | | X Y |
| | | L | | Z |

Sit series conuergens, cuius primi termini conuergentes sint A,B, secundi C,D, tertij E, F; sintque secundi termini ità facti à primis, vt ratio B maioris ad A minorem sit multiplicata rationis C ad A in ratione data maioris inæqualitatis M ad N, & vt ratio B ad A sit multiplicata rationis D ad A in ratione data maioris inæqualitatis M ad O: sintq; tertij termini eodem modo facti ex secundis quò secundi facti sunt ex primis; atque ità continuetur series.

## PROP. IX. PROBLEMA:

*Oportet prædicta seriei terminationem inuenire.*

POnatur G cyphra seù nihil hoc est exponens rationis æqualitatis, seù rationis A ad A; sitque H ad libitum exponens rationis B ad A: sit vt M ad N ità differentia inter G & H, hoc est ipsa H vel exponens rationis B ad A ad excessum quo I superat G hoc est ipsam I, sed vt M ad N ità ratio B ad A est multiplicata rationis C ad A; & igitur Excessus quo I superat G hoc est ipsa I est exponens rationis C ad A. sit vt M ad O ità differentia inter G & H hoc est H ad excessum quo K superat G hoc est ipsam K, sed vt M ad O ità ratio B ad A est multiplicata rationis D ad A, cumque H sit exponens rationis B ad A, erit K exponens rationis D ad A: si igitur I sit exponens rationis C ad A & K exponens rationis D ad A; erit excessus quo K superat I exponens rationis D ad C. deindè sit vt M ad N ità excessus quo K superat I seù exponens rationis D ad C ad excessum quo R superat I, sed vt M ad N ità ex seriei compositione ratio D ad C est multiplicata rationis E ad C, atque excessus quo K superat I est exponens rationis D ad C; & proindè excessus quo R superat I est exponens rationis E ad C, atque I est exponens rationis C ad A, & proindè R est exponens rationis E ad A. deindè sit vt M ad O ità excessus quo K superat I ad excessum quo S superat I, sed vt M ad O ità ex seriei cōpositione ratio D ad C est multiplicata rationis F ad C, cumque excessus quo K superat I sit exponens rationis D ad C; erit excessus quo S superat I exponens rationis F ad C, atque I est exponens rationis C ad A, & proindè S est exponens rationis F ad A: cum igitur R sit exponens E ad A & S exponens rationis F ad A; erit excessus quo S superat R exponens rationis F ad E: & vtramque seriem continuando, demonstratur vt antè T esse exponentem rationis X ad A, & V esse exponentem rationis Y ad A: denique semper demonstrabitur terminos conuergentes

gentes

gentes ſeriei exponentium eſſe exponentes rationum, terminorum conuergentium ſeriei propoſitæ ad primam ſeriei quantitatem A, modò vtriuſque ſeriei termini conuergentes ſint in eodem ab initio ordine: & proindè terminatio ſeriei exponentium per huius 7 inuenta, quæ Ex: Gr: ſit L, erit exponens rationis, terminationis ſeriei propoſitæ ad primum terminum A: inueniatur igitur ratio Z ad A quę ſit multiplicata rationis datæ B ad A in ratione data L ad H; eritque Z terminatio quæſita, quam inuenire oportuit.

Ad hoc problema in numeris illuſtrandũ ſit M 4, N 2, O 1, A 6, B 10; erunt ſecũdi termini conuergentes rq60, rqq2160, tertij termini cõuergentes rqqq7776000, rqqqq100776960000000, & ſeriei terminatio rc360.

Aliud exemplum, ſit M 6, N, 2, O 3, A 5, B 10; erunt ſecundi termini conuergentes rc250, rq50, tertij termini cõuergẽtes rqcc4882812500000000, rqqc78125000000, & ſeriei terminatio r√12500. hactenus terminauimus omnes ſeries conuergentes quę fieri poſsũt vel à ſola proportione arithmetica vel à ſola proportione geometrica, nunc verò methodũ aggredimur, cuius ope omnium ſerierum conuergentium terminationes (ſi modò ſint in rerum natura) inueniri poſſunt.

## PROP. X. PROBLEMA.

*Ex data quantitate, eodem modo compoſita à duobus terminis conuergentibus cuiuſcunque ſeriei conuergentis, quo componitur ex terminis conuergentibus eiuſdem ſeriei immediatè ſequentibus; ſeriei propoſitæ terminationem inuenire.*

SIt ſeries conuergens, cuius duo termini conuergentes quicunque ſint a, b, & termini conuergentes immediatè ſequentes rqab, $\frac{aa}{rqab}$ ſumma terminorũ cõuergentiũ a + b multiplicata in terminũ cõuergentẽ primũ a efficit aa + ab: & ſumma terminorum conuergentiũ immediatè ſequentiũ

nempè

pè $\sqrt{q}ab + \frac{aa}{\sqrt{q}ab}$ multiplicata in primum terminum conuergentem $\sqrt{q}ab$ efficit etiam $aa + ab$; ex his inuenienda ſit ſeriei propoſitæ terminatio. manifeſtum eſt quantitatem $aa + ab$ eodem modo fieri à terminis conuergentibus $a,b,$ quo à terminis conuergentibus immediatè ſequentibus $\sqrt{q}ab$, $\frac{aa}{\sqrt{q}ab}$: & quoniam quantitates $a,b,$ indefinitè ponuntur pro quibuslibet totius ſeriei terminis conuergentibus, euidens eſt ſummam quorumcunque terminorum conuergentium propoſitæ ſeriei multiplicatam in primum terminum conuergentem efficere quantitatem æqualem illi, quæ fit à ſumma terminorum conuergentium immediatè ſequentium multiplicata etiam in primum ſuum terminum conuergentem; cumque duo termini conuergentes duos terminos cõuergentes ſemper immediatè ſequuntur, manifeſtum eſt ſummam duorum quorumlibet terminorum conuergentium multiplicatam in primum ſemper efficere eandem quantitatem nempè $aa + ab$, atque vltimi termini conuergentes ſunt ęquales, & proindè ſit vltimus ille terminus ſeù ſeriei terminatio $z$, quæ ſibi addita & in ſummam multiplicata efficit $2zz$, quæ quantitas debet eſſe æqualis quantitati $aa + ab$, & æquatione reſoluta dabitur $z$ seù reriei terminatio $\sqrt{q}\frac{aa + ab}{2}$, quam inuenire oportuit.

Et proindè ad inueniendam cuiuſcunque ſeriei conuergentis terminationem; opus eſt ſolummodo inuenire quantitatem eodem modo compoſitam ex terminis convergentibus primis, quo componitur eadem quantitas ex terminis conuergentibus ſecundis.

## CONSECTARIVM.

Quoniam non refert in problemate ſiuè termini conuergentes $a,b,$ ſint primi, ſecundi, vel tertij &c. manifeſtum eſt omnes ſeriei conuergentis terminationem eodem modo eſſe compoſitam ex terminis conuergentibus primis quo ex terminis conuergentibus ſecundis, tertijs, vel quartis, &c.

PROP.

## PROP. XI. THEOREMA.

*Dico sectorem circuli, ellipseos vel hyperbolæ* ABIP *non esse compositum analyticè à triangulo* ABP *& trapezio* ABFP.

Ponatur triangulum ABP $a$ & trapezium ABFP $b$: manifestum est ex prędictis trapezium ABIP esse $\sqrt{ab}$ & polygonum ABDLP $\frac{2ab}{a + \sqrt{ab}}$, item sectorem ABIP esse huius seriei conuergentis terminationem, vt ex seriei terminis auferātur signa radicis & fractionis, pro $a$ & $b$ primis seriei terminis conuergentibus, hoc est pro triangulo ABP & trapezio ABFP ponantur $a^3 + a^2b$ & $ab^2 + b^3$; eruntque secundi seriei termini conuergentes, hoc est trapezium ABIP & polygonum ABDLP, $ba^2 + b^2a$ & $2b^2a$. dico seriei conuergentis (cuius primi termini conuergentes sunt $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$ & secundi sunt $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$) terminationem non esse compositā analyticè à terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$: si enim componatur prædicta terminatio analyticè à terminis conuergentibus $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$; componetur etiam eadem terminatio analyticè & eodem omninò modo à terminis conuergentibus $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; & proindè eadem quātitas nempè prædicta terminatio eodem modo componitur analyticè ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quo componitur ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$, sed nulla quantitas potest eodē modo analyticè cōponi ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quo componitur ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$, quod sic demonstro. si analytycè cōponeretur quantitas ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, eodem modo, quo analyticè componitur eadem quantitas ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; addendo, subtrahendo, multiplicando & diuidendo terminos $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$ & radices

| | |
|---|---|
| $a^3 + a^2b$ | $ab^2 + b^3$. |
| $ba^2 + b^2a$ | $2b^2a$ |

dicesex factis extrahendo, eadem fieret quantitas ac si codē modo adderentur, si bducerentur, multiplicarentur & diuiderentur termini $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$, & radices eędem ex factis extraherentur, sed posterius fieri non potest ergo nec prius; minorem sic probo, si eadem fieret quantitas ex additione, subductione, multiplicatione, diuisione & radicū extractione terminorum $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quæ fieret ex eadem additione, subductione, multiplicatione diuisione & radicum extractione terminorum $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; tunc addendo æquales quātitates terminis $a^3 + a^2b$, $ba^2 + b^2a$, vel ab illis siuè ipsorum factis æquales quantitates subducēdo, vel illos siuè ipsorum factos æqualibus quantitatibus multiplicando vel diuidendo, vel denique illos siuè ipsorū factos eodem modo in se multiplicando, vel ex ijsdem easdē radices extrahendo, hasce analyticas operationes aliquo modo mutando, reiterando vel vtrumque vel neutrum faciendo, fieri possent duo vltima producta, nempè vnum à termino $ab^2 + b^3$ & alterum à termino $2b^2a$; ità vt vltimū productum ex termino $a^3 + a^2b$ cum vltimo producto ex termino $ab^2 + b^3$ additum, subductum, multiplicatum, diuisum, & ex facto radice aliqua extracta (hasce analyticas operationes aliquo modo mutando, reiterando vel vtrumque vel neutrum faciendo) eandem efficiat quantitatem quam efficit vltimum productum ex termino $ba^2 + b^2a$ cum vltimo producto ex termino $2b^2a$ eodem omnino modo additum, subductum, multiplicatum, diuisum, & ex facto eadem etiam radice extracta, hasce analyticas operationes eodem omninò modo mutando, reiterando vel vtrumque vel neutrū faciēdo; sed posterius est absurdum ergò & prius: sequela maioris patet ex octaua definitione huius, minorē sic probo, in termino $a^3 + a^2b$ reperitur potestas ipsius $a$ nēpe $a^3$, quæ est altior vlla potestate eiusdem $a$ in termino $ba^2 + b^2a$; & proindè terminos $a^3 + a^2b$, $ba^2 + b^2a$, cum æqualibus quantitatibus addendo, subtrahendo, multiplicando, diuidendo, &c: sicut superius dictum est, semper manet potestas ipsius a in vltimo producto ex termino $a^3 + a^2b$

altior

altior poteſtate vlla ipſius $a$ in vltimo producto termini $ba^2 + b^2a$, quoniam illos cum æqualibus quantitatibus addendo, ſubſtrahendo, &c, ſemper manēt in factis eędem poteſtates, & illos in ſe eodem modo multiplicando ſemper magis eleuatur altior poteſtas in termino $a^3 + a^2b$ quam eleuatur depreſſior poteſtas in termino $ba^2 + b^2a$, & ex illis eaſdem radices extrahendo, vbi $a$ fuerat eleuatior in poteſtate erit etiam eleuatior in radice: & quoniam eadem reperitur altiſſima poteſtas ipſius $a$ in termino $ab^2 + b^3$ quæ reperitur in termino $2b^2a$, demonſtratur vt antè altiſſimam poteſtatem ipſius $a$ in vltimo producto ex termino $ab^2 + b^3$ eandem eſſe cum altiſſima poteſtate ipſius $a$ in vltimo producto ex termino $2b^2a$: in vltimo igitur producto termini $a^3 + a^2b$ reperitur altior poteſtas ipſius $a$ quam in vltimo producto termini $ba^2 + b^2a$, & in vltimo producto termini $ab^2 + b^3$ altiſſima poteſtas ipſius $a$ eadem eſt cum altiſſima poteſtate ipſius $a$ in vltimo producto termini $2b^2a$; & igitur vltima producta ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, eodem modo inter ſe addita, ſubducta, multiplicata, diuiſa, &c. ſemper efficient quantitatem, in qua reperitur altior poteſtas ipſius $a$ quam vlla quæ reperiri poteſt in quantitate facta ex eadem prorſus additione, ſubductione, multiplicatione, diuiſione, &c, productorū à terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; quoniam altior poteſtas cum altera poteſtate ſemper altiorē facit poteſtatem quam depreſſior poteſtas cum eadem altera poteſtate; & igitur iſtæ duæ quantitates non poſſunt eſſe indefinitè æquales, cum reperiatur altior poteſtas ipſius $a$ in vna quam in altera: atque hinc euidens eſt quod ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolę ABIP non poſſit componi analyticè à triangulo ABP & trapezio ABFP, quod demonſtrandum erat.

Vt autem euidentius fiat propoſitum, aliam demonſtrationem breuiorem faciliorem & ex alio medio petitam hic ſubiungo: quantitas non poteſt componi analyticè ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, eodem modo quo componitur eadem quantitas ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; quoniam addendo,

dendo, substrahendo, multiplicando, diuidendo duo binomia $a^3 + a^2 b$, $ab^2 + b^3$ & radices ex vltimo facto extrahendo, plura fiunt nomina in vltimo producto, quam si eodem modo adderentur, subducerentur multiplicarentur, diuiderentur, binomium $ba^2 + b^2 a$ & simplex quantitas $2b^2 a$, & eædem quoque radices ex facto extraherentur; & si plura sint nomina in vno producto quam in altero, impossibile est vt sint indefinitè æqualia, quod est propositum, reliqua enim ex priore demonstratione haberi possunt.

## SCHOLIVM.

OBscurũ fortassis videbitur hoc theorema ob multas inusitatas in geometria voces quas hic adhibere oportet, & ob multa supposita lemmata, quę demonstrare pigebat, quoniã cuiuis analystæ vel prima lectione sunt obuia, ex natura enim operationũ analyticarum omninò dependent.

Locus hic requirit vt aliquid dicã de proportione inter triangulũ ABP & sectorẽ ABIP; quod vt fiat, aduertẽdũ est verissimũ philosophorum axioma, nempe omnem nostram cognitionem à sensu ortum habere: inter proportiones enim, sola commensurabilis sensu attingitur & perfectè ab humana mente intelligitur; incommensurabilis enim à mathematicis solũmodò ad huc cõtẽplatur, quatenus cõmensurabilis cuiusdam rationis est subduplicata, subtriplicata, &c. vel ex talium additione, subductione, &c. genita: hoc est, quantitas quæ quantitati propositæ est incommensurabilis ex eo solummodo ab humana mente contemplatur, quod ex aliquot quantitatum cognitarum & propositę quantitati commensurabilium additione, subductione, multiplicatione, diuisione & radicum extractione componi possit: at ex hactenus demonstratis manifestum est sectorem ABIP non posse componi ex additione, subductione, multiplicatione, diuisione, & radicum extractione trianguli ABP & trapezii ABFP: triangulum autẽ ABP & trapezium ABFP supponimus esse quantitates inter se analyticas; & proindè sector ABIP illis analytica esse non potest, hoc est ex quantitatum

ipsis

ipſis ABP, ABFP analyticarũ additione, ſubductione, multiplicatione, diuiſione & radicũ extractione cõponi nõ poteſt; & proinde ex hoc capite nulla poteſt exhiberi ratio inter triangulum ABP & ſectorẽ ABIP, cum euidens ſit illam nõ eſſe analyticam. ſed dicet fortè aliquis rationem inter triangulum ABP & ſectorem ABIP omnifariam variari poſſe; & proindè poſſe eſſe inter ſe in ratione qualibet data ſiuè analytica ſiuè etiam commenſurabili: reſpondeo hoc eſſe veriſſimum, ſed in hoc caſu ratio inter triangulum ABP & trapezium ABFP non erit analytica; & proindè ex dato circulo ellipſe vel hyperbola nũquam dabitur in analyticis triangulum ABP, quod ex prædictis clariſſimè patet. etiamſi ex prædicto capite non poſſimus comprehendere rationem inter triangulum ABP & ſectorem ABIP, poſſumus tamen eius aliquam habere cognitionem, ex eo quod ſector ABIP ſit terminatio ſeriei conuergentis datæ; & ex hac conſideratione poſſibile eſt inuenire quantitatem datę commenſurabilem cuius differentia à ſectore ABIP minor fuerit quacũque quantitate propoſita, ad hoc enim ſemper recurrendum eſt, cũ de quantitatibus quibuſcunque incommenſurabilibus tractant practici, & in hac noſtra approximatione praxis non erit operoſior quam in multis aliis etiam quantitatum analyticarũ approximationibus, immò multò breuior, facilior & paratior erit illis Vietæ ſectionibus angularibus, quæ tamen ſummæ matheſeos vtilitati in praxem reducuntur. non video ergò quare circuli quadratura diutius æſtimetur ignorari; cum enim demõſtratum ſit rationem circuli ad diametri quadratum non eſſe analyticam, vanum certè erit & ineptum illam ſicut talem impoſterum quærere: at reiectis quãtitatibus analyticis, vix credo vllam poſſe eſſe notiorem hiſce noſtrarum ſerierum conuergentium terminationibus, ſicut ex ſequentibus pleniſſimè apparebit.

PROP.

## PROP. XII. THEOREMA.

A C D B

SIt trapezium ABIP, A; polygonum ABEIOP, C; polygonum ABCG KNP, D; & polygonum ABDLP, B. dico D esse medium harmonicũ inter C & B. ex huius 4, A : C : : C : B, & componendo A ✠ C : C : : C ✠ B : B, sed ex huius 5, A ✠ C : C : : 2C : D; & ideò C ✠ B : B : : 2C : D, & permutando B ✠ C : 2C : : B : D, & diuidendo, differentia inter B & C est ad 2C, vt differentia inter B & D ad D, & permutando differentia inter B & C est ad differentiam inter B & D vt 2C ad D, hoc est, vt C ✠ B ad B, & diuidendo, differentia inter D & C est ad differentiam inter B & D vt C ad B; & proinde D est medium harmonicum inter C & B, quod demonstrare oportuit.

Hæc propositio eodem modo locum habet in omnibus polygonis complicatis, vt patet ex scholio 5 huius.

## PROP. XIII. THEOREMA.

A B
C D E

INter duas quantitates A, B, sit media arithmetica C, media geometrica D & media harmonica E. dico C, D, E, esse continuè proportionales. quoniam A, E, B, sunt in ratione harmonica; erit differentia inter A & E ad differentiam inter E & B vt A ad B; & componendo erit differentia inter A & B ad differentiã inter E & B, vt A ✠ B ad B; deinde permutando & componendo 2A : A ✠ B : : E : B, sed 2A est duplum ipsius A & A ✠ B duplum ipsius C; & ideò A : C : : E : B; & proinde CE = AB, & AB = DD, ideoq; CE = DD; & igitur C : D : : D : E, quod demonstrare oportuit.

## PROP. XIV. THEOREMA.

Sint duo polygona complicata A,B, nempè A intra circuli vel ellipseos sectorem & B extra: continuetur series conuergens horum polygonorũ complicatorum secundum nostram methodum subduplam descriptorum, ità vt polygona intra circulũ sint A,C,E, &c, & extra circulum B,D,F, &c; dico A + E minorem esse quam 2C: ex prædictis manifestæ sunt sequẽtes analogiæ; prima quoniam A,C,B, sunt continue proportionales; & secunda quoniam C, D, B, sunt harmonice proportionales;

| | |
|---|---|
| A | B |
| C | D |
| E | F |

C — A : B — C :: A : C

B — C : D — C :: A + C : A

& proinde excessus C supra A, hoc est C — A, est ad excessum D supra C seu D — C in ratione cõposita ex proportione A ad C & ex proportione A + C ad A, hoc est in ratione A + C ad C; at A + C est maior quam C, & ideo excessus C supra A est maior quam excessus D supra C, est autem D maior quam E, & proinde excessus C supra A multò maior est quam excessus E supra C; est igitur A + E minor quam 2C; quod demonstrare oportuit.

## PROP. XV. THEOREMA.

Iisdem positis: dico excessum C supra A minorem esse quadruplo excessus E supra C. ex prædictis manifestæ sunt sequentes tres analogiæ, prima quoniam A, C, B, sunt cõtinuè proportionales; secunda, quoniam C,D,B, sunt harmonicè proportionales; & tertia, quoniam C,E,D, sunt cõtinuè proportionales; & ideò excessus C supra A (hoc est) C — A est ad excessum E supra C seu E — C, vt AC + EC + AE + CC ad CC; at B ma

C — A : B — C :: A : C

B — C : D — C :: A + C : A

D — C : E — C :: E + C : C

ior eſt quã E, & ideò AB ſeù CC maior eſt quam AE, & igitur AE + CC minor eſt quam 2CC: atq; AC + EC eſt ad 2CC vt A + E ad 2C, ſed A + E minor eſt quam 2C; & ideo AC + EC minor eſt quam 2CC; proinde AC + EC + AE + CC minor eſt quam 4CC; & igitur C − A minor eſt quadruplo ipſius E − C, quod demonſtrare oportuit.

## PROP. XVI. THEOREMA.

| | |
|---|---|
| A | B |
| C | D |
| E | F |

Sint duo polygona complicata A, B; nempè A extra hyperbolæ ſectorem & B intra: Cõtinuetur ſeries conuergens horum polygonorum complicatorum ſecundum noſtram methodũ ſubduplam deſcriptorum, itavt polygona extra hyperbolem ſint A, C, E, &c. & intra hyperbolem B, D, F &c; Dico A + E maiorem eſſe quam 2C. ex prædictis manifeſtæ ſunt ſequentes duæ Analogiæ, prima quoniam A, C, B, ſunt continue proportionales; & ſecunda, quoniam C, D, B, ſunt harmonice proportionales; &

$A - C : C - B :: A : C$

$C - B : C - D :: A + C : A$

proinde exceſſus A ſupra C, hoc eſt A − C, eſt ad exceſsũ C ſupra D ſeù C − D, In ratione compoſita ex proportione A ad C & ex proportione A + C ad A hoc eſt in ratione A + C ad C, at A + C eſt maior quam C & ideò exceſſus A ſupra C eſt maior exceſſu C ſupra D, eſt autem E maior quam D; & proinde exceſſus A ſupra C multo maior eſt exceſſu C ſupra E; manifeſtum eſt igitur A + E maiorem eſſe quam 2C, quod demonſtrare oportuit.

PROP.

## PROP. XVII. THEOREMA.

Iſdem poſitis: dico exceſſum A ſupra C maiorem eſſe quadruplo exceſſus C ſupra E. ex prædictis manifeſtę ſunt ſequentes tres analogiæ; prima, quoniam A,C,B, ſunt continuè proportionales; ſecunda, quoniam C,D,B, ſunt harmonice proportionales; & tertia, quoniam C,E,D, ſunt cõtinuè proportionales; & ideò exceſſus A ſupra C, hoc eſt, A – C, eſt ad exceſſum C ſupra E, hoc eſt C – E in ratione cõpoſita ex proportionibus A ad C, A ✠ C ad A & E ✠ C ad C; & ideò A – C eſt ad C – E, vt AC ✠ EC ✠ AE ✠ CC ad CC; at B minor eſt quã E, & ideò AB, ſeu CC minor eſt quã AE; & igitur AE ✠ CC maior eſt quam 2 CC. atque AC ✠ EC eſt ad 2 CC vt A ✠ E ad 2 C; ſed A ✠ E maior eſt quam duo C, & ideò AC ✠ EC maior eſt quam 2 CC; & proinde AC ✠ EC ✠ AE ✠ CC maior eſt quam 4 CC; & igitur A – C maior eſt quadruplo ipſus C – E, quod demonſtrare oportuit.

A – C : C – B :: A : C

C – B : C – D :: A ✠ C : A

C – D : C – E :: E ✠ C : C

## PROP. XVIII. THEOREMA.

Sint duę quantitates inæquales; A minor, B maior, C media geometrica, D media arithmetica. dico D maiorem eſſe quam C. quoniam B, C, A, ſunt continuè proportionales; erit diuidendo, permutando, & componendo; vt exceſsus B ſupra A ad exceſsum C ſupra A, ità A ✠ C ad A, atque A ✠ C maior eſt duplo ipſius A; & proinde exceſus B ſupra A maior eſt duplo exceſsus C ſupra A; ſed exceſſus B ſupra A duplus eſt exceſſus D ſupra A, & & ideò exceſſus D ſupra A maior eſt exceſsu C ſupra A; eſt igitur D maior quã C, quod demonſtrare oportuit.

E

A C B

D

## PROP. XIX. THEOREMA.

IIsdem positis; sit inter A & B media harmonica E. dico C maiorem esse quam E. ex huius 13, D est ad C vt C ad E, sed D maior est quam C; & ideò C maior est quam E, quod demonstrare oportuit.

## CONSECTARIVM.

EX duabus precedentibus manifestum est D maiorem esse quam E, hoc est mediam arithmeticam inter duas quantitates inęquales maiorem esse media harmonica inter easdem.

## PROP. XX. THEOREMA.

| | | |
|---|---|---|
| A | B | A |
| C | D | C |
| E | F | G |
| K | L | H |
| | Z | X |

SInt duo polygona complicata A, B, nempè A intra circuli vel ellipseos sectorem, B extra. cõtinuetur series conuergens horum polygonorum complicatorum secundum methodum nostram subduplam descriptorum; itàvt polygona intra circulum sint A, C, E, K, &c, & extra circulum B, D, F, L, &c; sitque seriei conuergentis terminatio seu circuli vel ellipseos sector Z. dico Z maiorem esse quã C vna cum triente excessus C supra A. sit excessus G supra C quarta pars excessus C supra A, & excessus H supra G quarta pars excessus G supra C; continueturque hæc series in infinitum, vt eius terminatio sit X. Excessus C supra A minor est quadruplo excessus E supra C; & ideò excessus E supra C maior est excessu G supra C, est ergo E maior quam G. deinde excessus E supra C minor est quadruplo excessus K supra E, & ideò excessus G supra C multo minor est quadruplo excessus K supra E, est igitur excessus K supra E maior excessu H supra G; cumque E maior sit quam G, manifestum est K maiorem esse quam H: eodem prorsus modo demonstratur in omni serierum A, C, E; A, C, G, continuationè, terminum

quem-

quemcunq; seriei A,C,E, maiorem esse quam idem numero terminus seriei A,C,G; & ideo terminatio seriei A,C,E, nempè Z maior erit terminatione seriei A,C,G, nempè X, ac ex Archimedis quadratura parabolæ constat X ęqualem esse ipsi C vna cum triente excessus C supra A, & proinde Z eadem maior est, quod demonstrare oportuit.

## PROP. XXI. THEOREMA.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | A | B |
| C | D | G | H |
| E | F | M | N |
| K | L | O | P |
| Z | | X | |

IIsdem positis quæ supra; dico Z seu sectorem circuli vel ellipseos minorem esse quam maior duarum mediarum continuè proportionalium arithmeticè inter A & B. inter A & B sit media Arithmetica G, & inter G & B sit media Arithmetica H; item inter G & H sit media Arithmetica M, & inter M & H sed media Arithmetica N; continueturque hæc series conuergens A B,G H, M N, O P, in infinitum, vt fiat eius terminatio X. satis patet ex prædictis G maiorem esse quam C, atque H media Arithmetica inter G & B maior est media harmonica inter easdem G,B; media autem harmonica inter G & B maior est quam D media harmonica inter C & B, quoniam G maior est quam C; & ideò media Arithmetica inter G & B, hoc est H, maior est quam D media harmonica inter C & B. eodem modo M media arithmetica inter G & H maior est media geometrica inter easdem G & H: & quoniam G est maior quam C, & H quam D; media geometrica inter G & H maior est quam E media geometrica inter C & D; & proinde M maior est quam E. deinde N media arithmetica nter M & H maior est media harmonica inter easdem, & quoniam H maior est quam D & M quam E, media harmonica inter M & H maior est quam F media harmonica inter E & D; & ideo N eadem F maior est. eadem modo vtramque seriem in infinitum continuando, semper demonstratur terminum quemlibet

bet seriei AB, CD, minorem esse quam idem numero terminus seriei. AB, GH; & igitur terminatio seriei AB,CD, nempè Z minor erit terminatione seriei AB, GH, nempè X; atq; ex huius 7, terminatio seriei AB, GH, seù X æqualis est maiori duarum mediarum arithmetice continue proportionaliũ inter A & B, & ideò Z eadem minor est, quod demonstrandũ erat.

## PROP. XXII. THEOREMA.

Iisdem positis quæ supra; dico Z seù sectorem circuli vel ellipseos minorem esse quam maior duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B. inter A & B sit media geometrica G, & inter G & B sit media geometrica H; Item inter G & H media Geometrica M, & inter M & H media Geometrica N; continueturque hæc series conuergens A B, GH, MN, OP, &c, in infinitum, vt fiat eius terminatio X. satis patet ex prædictis C & G esse inter se æquales, item H maiorem esse quam D; atq; ob hanc rationem M media geometrica inter G & H maior est quam E media geometrica inter C & D. deinde N media geometrica inter M & H maior est media harmonica inter easdem; & quoniam M maior est quam E & H maior quam D, erit media harmonica inter M & H maior quã F media harmonica inter E & D; & ideò N media geometrica inter M & H maior erit quam F. eadem methodo vtramque seriem in infinitum continuando semper demonstratur terminũ quemlibet seriei AB, CD, minorem esse quam idem numero terminus seriei AB, GH; & igitur terminatio seriei AB, CD, nempe Z minor erit terminatione seriei AB, GH, nempè X; atque ex huius 9 terminatio seriei AB, GH, seu X, æqualis est maiori duarum mediarum geometrice continue proportionalium inter A & B; & ideò Z eadem minor est, quod demonstrare oportuit.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | A | B |
| C | D | G | H |
| E | F | M | N |
| K | L | O | P |
| Z | | X | |

SCHO-

## SCHOLIVM.

NOn opus est vt hic demonstrem maiorem duarum mediarum arithmetice continuè proportionalium inter duas inæquales quantitates maiorem esse quam maior duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter easdem, & igitur huius propositionis approximationem precedentis esse exactiorem, quod etsi fiat; præcedente tamen ob facilitatem potius vtimur.

## PROP. XXIII. THEOREMA.

| | | |
|---|---|---|
| A | B | A |
| C | D | C |
| E | F | G |
| K | L | H |
| Z | | X |

SInt duo polygona complicata A, B, nempè A extra hyperbolæ sectorem, B intra. continuetur series conuergens horum polygonorum complicatorum secũdum methodum nostram subduplam descriptorum, ita vt polygona extra hyperbolam sint A, C, E, K, &c, & intra hyperbolam B, D, F, L, &c; Sitque seriei conuergentis terminatio seu hyperbolæ sector Z. Dico Z maiorem esse quam C dempto triente excessus A supra C. sit excessus C supra G quarta pars excessus A supra C, & excessus G supra H quarta pars excessus C supra G, continueturque hæc series in infinitum vt eius terminatio sit X. excessus A supra C maior est quadruplo excessus C supra E, & ideò excessus C supra E minor est excessu C supra G, est ergo E maior quam G. Deinde excessus C supra E maior est quadruplo excessus E supra K, & ideò excessus C supra G multò maior est quadruplo excessus E supra K, & igitur excessus G supra H maior est excessu E supra K; cũq; E maior sit quã G, manifestũ est K etiã maiorem esse quam H: eodem prorsus modo demonstratur in omni serierum A, C, E, K; A, C, G, H, continuatione, terminum quemcumque seriei A, C, E, maiorem esse quam idem numero

mero terminus seriei A,C,G; & ideò terminatio seriei A, C, E, nempe Z, maior erit terminatione seriei A, C, G, nempe X; at ex Archimedis quadratura parabolæ constat X çqualẽ esse ipsi C dempto triente excessus A supra C, & proinde Z eadem maior est, quod demonstrare oportuit.

## PROP. XXIV. THEOREMA.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | A | B |
| C | D | G | H |
| E | F | M | N |
| K | L | O | P |
| Z | | X | |

Iisdem positis; dico Z seu sectorem hyperbolę minorem esse quam minor duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B. Inter A & B sit media Arithmetica G, & inter G & B sit media arithmetica H, Item inter G & H sit media Arithmetica M, & inter M & H sit media Arithmetica N: continueturque hæc series conuergens A B, G H, M N, O P, in infinitum, vt fiat eius terminatio X. satis patet ex prędictis G maiorem esse quam C; atque H media arithmetica inter G & B maior est media harmonica inter easdem G & B; media autem harmonica inter G & B maior est media harmonica inter C & B, nempe D, quoniam G maior est quam C; & ideò media Arithtmetica inter G & B nempe H maior est quam D media hormonica inter C & B. eodem modo M media Arithmetica inter G & H maior est media geometrica inter easdem G & H; & quoniam G est maior quam C & H quam D, media geometrica inter G & H maior est quam E media geometrica inter C & D; & proinde M maior est quam E. Deinde N media arithmetica inter M & H maior est media harmonica inter easdẽ; & quoniam H maior est quam D & M quam E, media harmonica inter M & H maior est quam F media harmonica inter E & D; & ideò N eadem F maior est. eodem modo vnãque seriem in infinitum continuando, semper demonstratur terminum quẽlibet seriei A B, C D, minorem esse quam idem numero terminus seriei A B, G H; & igitur terminatio

seriei

feriei AB,CD, nempe Z, minor erit terminatione feriei AB, GH, nempe X; atque ex huius 7 terminatio feriei AB, GH, nempè X, æqualis eſt minori duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B, & ideò Z eadem minor eſt, quod demonſtrare oportuit.

## PROP. XXV. THEOREMA.

Iiſdem poſitis; dico Z ſeu ſectorem hyperbolę minorem eſſe quam minor duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B. Inter A & B ſit media geometrica G, & inter G & B media geometrica H, Item inter G & H media geometrica M, & inter M & H media geometrica N; continueturque hæc ſeries conuergens AB, GH, MN, OP, &c, in infinitum vt fiat eius terminatio X. ſatis patet ex prædictis C & G eſſe inter ſe æquales, & H maiorem eſſe quam D; atque ob hanc rationem M media geometrica inter G & H maior eſt quam E media geometrica inter C & D. Deinde N media geometrica inter M & H maior eſt media harmonica inter eaſdem; & quoniam M maior eſt quam E & H quam D, erit media harmonica inter M & H maior quam F media harmonica inter E & D; proinde N media geometrica inter M & H maior erit quam F. eadem methode vtramque feriem in infinitum continuando, ſemper demonſtratur terminum quemlibet feriei AB, CD, minorem eſſe quam idem numero terminus feriei AB, GH; & igitur terminatio feriei AB, CD, nempe Z minor erit quam terminatio feriei AB, GH, nempe X; atque ex huius 9 terminatio feriei AB, GH, ſeu X, æqualis eſt minori duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B; & ideò Z eadem minor eſt, quod demonſtrare oportuit.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | B | | A | B |
| C | D | | G | H |
| E | F | | M | N |
| K | L | | O | P |
| Z | | | X | |

Ex dictis manifeſtum eſt hanc approximationem exactionem eſſe illa, in antecedenti propoſitione, demonſtrata, etiã

si hęc sit paulo laboriosior. sed non dissimulandum est duas posse esse series æquales terminationes habentes, ita vt semper quilibet terminus vnius seriei sit maior quam idem numero terminus alterius seriei; sed in talibus seriebus quo longius producuntur, eà minor est eorundem numero terminorum differentia: sed è contra nostræ series quò longius producuntur, eò magis differũt ijdem numero termini, sicut facillimè demonstrari potest.

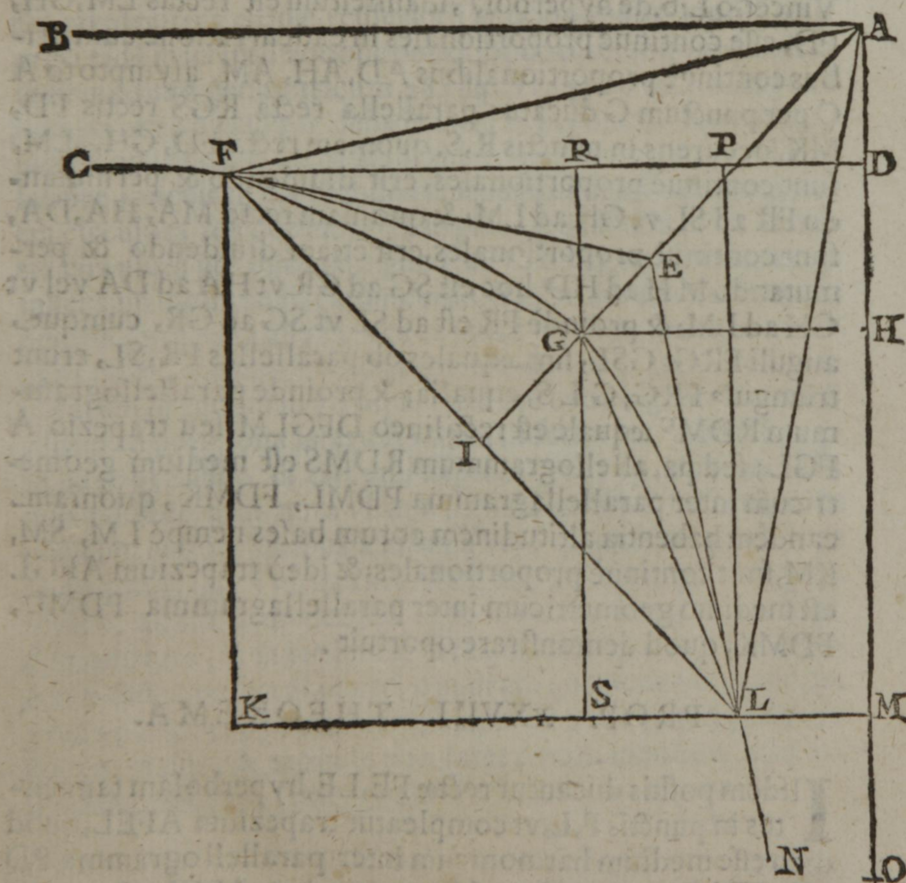
Experientia obseruo differentiam inter secundam duarũ mediarum arithmetice proportionalium & secundam duarum mediarum geometricè proportionalium semper esse multo maiorem differentia intet secundam duarum mediarum geometricè proportionalium & sectorem circuli, ellipseos vel hyperbolę; quod notatu dignũ existimo, hinc enim colligitur sectorem differre vix vltra vnitatem à secũda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionaliũ, quando medium arithmeticum non excedit medium geometricum vltra vnitatem, quod summoperè notandum, nam ex hoc euidens est approximationem audacter esse adhibendã, quandò ità continuatur series vt medietas prima notarum sit eadem in vtroque termino conuergente, quod experientia etiam euincit; nunquam enim in hoc casu differt sector vnitatè à secunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium.

Est etiam alia approximatio omniũ breuissima & maxime admiranda, etiamsi mihi non contingat illam demonstratione geometrica munire; nempe si prima notarum triens in vtroque termino conuergente sit eadem, sector circuli, ellipseos vel hyperbolæ semper differt infra vnitatem a maximo quatuor arithmetice cõtinue proportionalium inter terminos nostræ approximationis.

## PROP. XXVI. THEOREMA.

Sit hyperbola quæcunque CFN cuius centrum A, asymptota AB, AO; sitque eius sector AFGL cum triangu-

lo circumscripto AFL: asymptotorum vni AB parallellæ ducantur rectæ FD, LM; & compleantur parallelogramma FDMK, PLMD. dico triangulum AFL esse medium arithmeticum inter parallelogramma FDMK, PLMD. Gregorius à S. Vincentio in Lib. de Hyperbola demonstrat triangulum AFL esse æquale trapezio DFLM, sed manifestum est trapezium DFLM esse medium arithmeticum inter parallelogramma FDMK, PLMD; & ideò patet propositum.



## PROP. XXVII. THEOREMA.

IIſdem poſitis: ducatur A I rectam F L bifariam diuidens in I & hyperbolam interſecans in puncto G, fiatque trapezium ſectori circumſcriptum AFGL, quod dico eſſe mediũ geometricum inter parallellogramma FDMK, PLMD. ex demonſtratis Gregorij à S. Vincẽtio euidens eſt trapezium AFGL æquale eſſe rectilineo DFGLM. & quoniam AGI recta ſecat rectam FL bifariam in I, ex eiuſdem Gregorij à S. Vincẽtio Lib. de hyperbola, manifeſtum eſt rectas LM, GH, FD, eſſe continuè proportionales in eadem ratione cum tribus continuè proportionalibus AD, AH, AM. aſymptoto A O per punctum G ducatur parallella recta RGS rectis FD, MK, occurens in punctis R, S. quoniam rectæ FD, GH, LM, ſunt continuè proportionales, erit diuidendo & permutando FR ad SL vt GH ad LM: & quoniam rectę MA, HA, DA, ſunt continuè proportionales, erit etiam diuidendo & permutando M H ad HD hoc eſt SG ad GR vt HA ad DA vel vt GH ad LM; & proindè FR eſt ad SL vt SG ad GR, cumque anguli FRG, GSL, ſint æquales ob parallellas FR, SL, erunt triangula FRG, G L S, ęqualia; & proinde parallellogrammum RDMS æquale eſt rectilineo DFGLM ſeu trapezio A FGL; ſed parallellogrammum RDMS eſt medium geometricum inter parallellagramma PDML, FDMK, quoniam eandem habentia altitudinem eorum baſes nempè LM, SM, KM, ſunt continuè proportionales; & ideò trapezium AFGL eſt medium geometricum inter parallellagramma PDML, FDMK, quod demonſtrare oportuit.

## PROP. XXVIII. THEOREMA.

IIſdem poſitis ducantur rectæ FE, LE, hyperbolam tangentes in punctis F, L, vt compleatur trapezium AFEL, quod dico eſſe medium harmonicum inter parallellogramma PD ML, FDMK. triangulum AFL, trapezium AFGL, & mediũ

harmonicum inter parallellogramma PDML, FDMK, sunt continuè proportionalia, quoniam triangulum AFL est medium arithmeticum & trapezium AFGL medium geometricum inter eadē parallellogramma, vt patet ex huius 13; sed triangulum AFL, trapezium AFGL, & trapezium AFEL sunt continuè proportionalia ex huius 1; & proinde trapeziū AFEL est medium harmonicum inter parallellogramma PDML, FDMK, quod demonstrare oportuit.

## PROP. XXIX. PROBLEMA.

*Dato circulo æquale inuenire quadratum.*

Sit quadratū circulo circūscriptū 4000000000000000; erit ergo eidē inscriptū 2000000000000000, inter quæ quadrata sit medium geometricum 2828427124746190 octagonū nempè intra circulum: deinde inter octagonum intra circulum & quadratum extra sit medium harmonicum, quod leui labore inuenitur diuidendo duplum quadrati octagoni intra circulum seu duplum rectanguli à quadratis intra & extra circulum per summam quadrati & octagoni intra; eritq; inuentum medium harmonicum, octagonum circumscriptū, nempè 3313708498984760. continuetur hæc series conuergens polygonorum complicatorum donec prima medietas notarum sit eadem in vtroque termino conuergente, nimirū vsque ad polygona laterum 16384; inscriptum enim est 3141592576586860 & circumscriptum 3141592692091258; non consideratur nota vltima, quoniam in diuisionibus & radicum extractionibus semper à vera quantitate paululum aberramus, quod vltimam notam imperfectam plerumque reddit. adhibeatur deinde approximatio in huius 20 & 21 demonstrata, & inuenientur termini intra quos est vera circuli mēsura, posito diametri quadrato 4000000000000000, 3141592653589789 minor circulo & 3141592653589792 eodem maior, & proinde non latet circuli mensura, quam inuenire oportuit. polygonorum seriem hic appono.

| | Intra circulum | extra circulum |
|---|---|---|
| 4 | 2000000000000000 | 4000000000000000 |
| 8 | 2828427124746190 | 3313708498984760 |
| 16 | 3061467458920718 | 3182597878074527 |
| 32 | 3121445152258051 | 3151724907429255 |
| 64 | 3136548490545938 | 3144118385245904 |
| 128 | 3140331156954752 | 3142223629942456 |
| 256 | 3141277250932772 | 3141750369168965 |
| 512 | 3141513801144299 | 3141632080703181 |
| 1024 | 3141572940367090 | 3141602510256808 |
| 2048 | 3141587725277158 | 3141595117749588 |
| 4096 | 3141591421543029 | 3141593269613390 |
| 8192 | 3141592345578073 | 3141592807595664 |
| 16384 | 3141592576586860 | 3141592692091258 |

Circulus intra ſequentes terminos conſiſtit

3141592653589789 3141592653589792

eodem omnino modo reperitur rectilineum ęquale cuicunque ſectori circulari vel elliptico ex cognito triangulo inſcripto & trapezio circumſcripto.

## PROP. XXX. PROBLBMA.

*Ex dato ſinu inuenire arcum.*

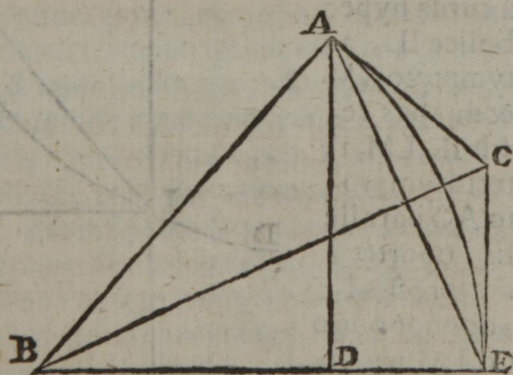
SIt arcus circuli AE deſcriptus ex cẽtro B. huius arcus datur radius nempe AB & ſinus nempe AD: oportet inuenire quam proportionem habet ipſe arcus ad integram circuli circunferentiam. ſit arcus chorda AE & eius ſemiſſis tangens AC vel CE. ex quadrato radij AB auferatur quadratum ſinus AD & relinquetur quadratum ſinus complementi BD, datur igitur BD; & ideò datur area trianguli rectanguli ABD; datur quoque area trianguli ABE nempè rectangulum ſinus dati AD in ſemiſſem radij BE. deinde fiat vt ſumma triangulorum ABD, ABE, ad triangulum ABE ita duplum trianguli ABE ad trapezium ABEC, vt conſtat

ex huius 5. & ex dato triangulo inſcripto ABE & trapezio circumſcripto ABEC, inueniatur per præcedentem ſector ipſe ABE, qui ad circulum integrum datum queſitam habet proportionem arcus AE ad totam circunferentiam, quam inuenire oportuit.

## PROP. XXXI PROBLEMA.

*Ex dato arcu inuenire ſinum,*

EX dato arcu manifeſtum eſt dari ſectoris aream; hoc igitur ſectore dato conſideretur ex quot notis arithmeticis conſtet ſinus totus: deinde ſumatur ſectoris dati talis pars aliquota nēpè ſector ABE, vt triãguli inſcripti ABE & trapezij circumſcripti ABEC toties multiplicia, quoties ſector datus multiplex eſt ſectoris ABE, cõcordent in tot notis arithmeticis quot cõtinet radix quadrata ſinus totius; hoc enim facile fieri poteſt ex ſpeculatione tabellę huius 29: nõ enim requiritur in hoc praxis pręciſa, nam nihil refert etiamſi in magnis radijs diſcrepantia ſit notarum aliquot. Sectoris cogniti ABE, cuius arcus AE etiam innoteſcit, datur radius BA: ſit eius ſinus AD, z; & proinde è dato ſinu & radio, dabitur vt in antecedente triangulum ſectori inſciptum ABE & eidem trapezium circumſcriptum ABEC; atque ipſe ſector datus, eſt ſecunda duarum mediarum arithmeticè continue proportionalium inter triangulũ ſibi inſcriptum & trapezium circumſcriptum; & proinde datur ęquatio inter duplũ trapezii ABEC vnà cũ triangulo ABE & triplum ſectoris cogniti ABE, cuius reſolutio manifeſtat valorem quantitatis



ignotæ z, hoc est sinum AD: at dato arcu AE & eius sinu, datur etiam ex vulgata sectiorum angularium doctrina sinus omnium multiplicium eiusdem arcus AE; & proinde non latet sinus arcus in initio propositi, cum sit ad arcum AE in data ratione multiplici, quem inuenire oportuit.

## PROP. XXXII. PROBLEMA.

*Inuenire quadratum æquale spatio hyperbolico contento à curua hyperbolica, vno asymptoto & duabus rectis alteri asymptoto parallelis; quod spatium æquale est sectori hyperbolico cuius basis est eadem curua.*

Sit hyperbola DIL, cuius asymptota AO, AK, sibi occurrunt in angulo recto OAK. proponitur huius hyperbolæ spatium ILMK, contentũ à curua hyperbolica IL, asymptoto KM & duabus rectis IK, LM, alteri asymptoto AO parallelis. oportet è datis rectis IK 1000000000000, LM 10000000000000, AM 10000000.00000, & proinde recta quoque KM 9000000000000, inuenire

nire menſuram ſpatii ILMK. Producantur rectę IK, OL, & ducatur recta IP, vt compleantur rectangula LNKM, QIKM; manifeſtum eſt rectangulum LNKM eſſe 900000000000-0000000000000 & QIKM 9000000000000000000000000-000 & trapezium LIKM eſſe medium arithmeticum inter prædicta rectangula, hoc eſt 4950000000000000000000-0000. inueniatur inter rectangula LNKM, QIKM, medium geometricũ 28460498941515413987990042 quod erit pentagonũ ſpatio hyperbolico LIKM regulariter circũſcriptũ. Sitq; vt trapeziũ LIKM vnà cum dicto pentagono circumſcripto ad dictum pentagonum, ità duplum dicti pentagoni ad hexagonũ ſpatio hyperbolico LIKM regulariter inſcriptum, nẽpe 20779754131836628160009835; quod hexagonum erit polygonum complicatum cum prædicto pentagono; quæ duo rectilinea efficiant primos ſeriei terminos conuergentes: inter quæ ſit medium geometricum cuius quadrati duplum diuidatur per idem medium geometricũ vnà cum maiori termino ſeu pentagono circumſcripto; eruntq; medium geometricum & quotus, ſecundi termini conuergẽtes: atque ità continuetur ſeries hæc conuergens polygonorũm complicatorum, donec medietas prima notarum eadem ſit in vtroque termino conuergente, nempè ad terminũ vigeſimũ; polygonum enim circumſcriptum eſt 230258509-2995896153417386 4, & inſcriptum 230258509299931203-593181124: adhibeatur deinde adproximatio in huius 23 & 24 demonſtrata, & inuenientur termini intra quos conſiſtit vera ſpatii hyperbolici LIKM menſura, nempe 230258509-29940456240178681, minor ſpatio, & 230258509299404-56240178704 eodem maior, & ideò non latet ſpatij menſura, quam inuenire opertuit: totam polygonorum ſeriem hic appono vnà cum numero rectarum curuam hyperbolicam ſubtendentium in vnoquoque polygono circumſcripto.

Extra

| | Extra hyperbolam | Intra hyperbolam |
|---|---|---|
| 2 | 28460498941515413987990042 | 20779754131836628160009835 |
| 4 | 24318761696971474416609403 | 22410399968461612921314879 |
| 8 | 23345088913234727934949897 | 22868197570682058351436953 |
| 16 | 23105412906351426185065096 | 22986193244865462241217428 |
| 32 | 23045725982658962868047234 | 230159211117139340153267671 |
| 64 | 23030818728479610745741910 | 23023367512879647736902891 |
| 128 | 23027092819292183214705676 | 23025230015404383009313933 |
| 256 | 23026161398510805910921810 | 23025695697539046352276636 |
| 512 | 23025928546847571901068394 | 23025812121604634087915779 |
| 1024 | 23025870334152518169052273 | 23025841227841783762272302 |
| 2048 | 23025855780992551911165543 | 23025848504414868310197241 |
| 4096 | 23025852142703422669729927 | 23025850323559001769499206 |
| 8192 | 23025851233131194254554390 | 23025850778345089029496888 |
| 16384 | 23025851005738140519209367 | 23025850892041614212944994 |
| 32768 | 23025850948889877295901163 | 23025850920465745719335070 |
| 65536 | 23025850934677811503232115 | 23025850927571778609090592 |
| 131072 | 23025850931124795055887228 | 23025850929348286832351848 |
| 262144 | 23025850930236540944102405 | 23025850929792413888218560 |
| 524288 | 23025850930014477416159412 | 23025850929903445652188450 |
| 1048576 | 23025850929958961534173864 | 23025850929931203593181124 |

hyperbolę sector intra sequentes terminos consistit

23025850929940456240178681 23025850929940456240178704

potest

Poteſt igitur abſque periculo erroris ſumi ſequens numerus pro hyperbolæ ſectore, cuius numeri multiplices vſque ad decem, diuiſionis facilitandæ gratia in compoſitione logorithmorum, hic ſubiicimus; in magnis namque diuiſionibus preſtat vti repetita diuiſoris multiplicium ſubſtractione quam ordinaria diuiſione, vt conſtat expertis arithmeticis.

MAnifeſtum eſt hoc problema eodem ferè modo poſſe reſolui, etiamſi aſymptota AO, AK, non ſint conſtituta ad angulũ rectum: nos autẽ ità ſuppoſuimus,

| | |
|---|---|
| 1 | 23025850929940456240178700 |
| 2 | 46051701859880912480357400 |
| 3 | 69077552789821368720536100 |
| 4 | 92103403719761824960714800 |
| 5 | 115129254649702281200893500 |
| 6 | 138155105579642737441072200 |
| 7 | 161180956509583193681250900 |
| 8 | 184206807439523649921429600 |
| 9 | 207232658369464106161608300 |
| 10 | 230258509299404562401787000 |

vt facilior & paratior eſſet problematis vſus in doctrina logorithmica, quam primò inuenit nobiliſſimus noſter Neperus, & quam nos (ni fallor) ad ſummum perfectionis faſtigium nunc eleuamus.

## PROP. XXXIII. PROBLEMA.

*Propoſiti cuiuſcunque numeri logorithmum inuenire.*

EIſdem poſitis quę in antecedente, manifeſtum eſt, poſita IK vnitate, ML eſſe decem: poſita ergo IK vnitate ſit GH aſymptoto quoque AO parallela numerus propoſitus cuius deſideratur logorithmus. manifeſtum eſt ex data rectà GH dari KF, & ex precedenti dari etiam ſpatium hyperbolicum GIKH, quod ſpatium hyperbolicum dico eſſe logorithmum numeri propoſiti GH, poſito ſpatio hyperbolico LIKM logorithmo numeri denarii: eſt enim (ex Gregorio à S. Vicentio) ſpatium GHKI in eadem ratione ad ſpatiũ

LMKI, in quā ratio GH ad IK eſt multiplicata rationis LM ad IK; ſed ratio GH ad IK eſt multiplicata rationis LM ad IK in eadē ratione qua numerus GH eſt multiplicatus numeri LM, quoniam idem eſt conſequens in vtraq; ratione; & proinde ſpatium GIKH eſt in eadē ratione ad ſpatium LIKM, in qua numerus GH eſt multiplicatus numeri LM; & ideò (quoniā ex hypotheſi ſpatium LIKM eſt logorithmus numeri LM ſeù denarii) erit ſpatium GIKH logorithmns numeri propoſitī GH, quoniam hęc eſt logorithmorum eſſentialis proprietas, vt ſint inter ſe in eadem directa ratione, in qua eorum numeri ſunt vnus alterius multiplicati: at ponitur communiter logorithmus numeri denarii ad arbitrium vnitas cum numero quodam cyphrarū: ſi igitur fiat, vt ſpatium LIKM ad ſpatium GIKH, ita arbitrarius denarii logorithmus ad alium numerum; erit inuentus ille numerus, logorithmus numeri propoſiti GH, quem inuenire oportuit.

## SCHOLIVM.

PRaxis prędicti problematis prolixa eſt & laborioſa; & proinde vt abbreuietur labor noſter in compoſitione tabulæ logorithmorum; ſciendum eſt nos ſolūmodò laborare in inuentione logorithmorum, numerorum primorum; numerorum enim compoſitorum logorithmi ex primorum aditione & ſubductione nullo negotio inueniuntur. ſed vt numerorum primorum logorithmi facilius inueniantur, ordine progrediendum eſt à prioribus ad poſteriores, nempè à 10 cuius logorithmus eſt arbitrarius ad 2 numerū omnium primū, & a 10 & 2 ad 3, item à 10, 2 & 3 ad 7, item a 10, 2, 3 & 7 ad 11, & ſic deinceps. deinde inueniendi ſunt duo numeri compoſiti parum inter ſe differentes, quorum vnus compoſitus eſt ex numeris logorithmos cognitos habentibus, & ideò logorithmum datum habens, alter autem numerus compoſitus eſt ex ſolo numero primo (cuius quæritur logorithmus) vel ex illo vnà cum aliis numeris logorithmos cognitos habentibus. deinde applicētur hi numeri compoſiti

positi (qui exẽpli gratia sint GH,EF) in hyperbola asymptoto OA parallelli; & inueniatur spatium hyperbolicum EGHF per huius 32, quod breuiter, fit quoniam GH,EF, parum inter se differunt. ex supositione, vnius numeri, exempli gratia GH, datur logorithmus, & proinde datur eius logorithmi ratio ad logorithmum denarii arbitrarium, quę eadem est ( ex hactenus demonstratis ) cum ratione spatii hyperbolici GIKH ad spatium hyperbolicum LIKM, datur autem ex huius 32 spatium LIKM; & ideò innotescit quoque spatium IKHG, cumque detur spatium EGHF, innotescit quoque EIKF; & proinde datur logorithmus numeri compositi EF; cumque ex suppositione dentur logorithmi omnium numerorum numerum EF componentium, excepto numero illo primo cuius logorithmus desideratur, dabitur quoque illius numeri primi logorithmus, quẽ inuenire oportuit. Exempli gratia, propositũ sit inuenire logorithmum numeri binarii, supposito arbitrario numeri denarii logorithmo, vnitate cum 25 cyphris. duo numeri compositi parum inter se differentes sunt 1000 & 1024; numeri 1000 datur logorithmus, nempe triplum spatii 2302585092994045624017870 0 in antecedente inuenti, posito scilicet illo spatio numeri denarii logorithmo arbitrario; numeri 1024 ignoratur logorithmus, est enim compositus ex solo numero primo 2, nempe eius decies multiplicatus est. applicentur hi numeri compositi in hyperbola, vt dictum est; sitque GH 1000, EF 1024: sed quoniam IK vnitas est 1000000000000, erit GH 1000000000000000 & EF 1024000000000000, & per huius 32 inueniatur spatium EGHF 2371652661731604211183067 (seriem conuergentem hic appono.

 vt lectori

| | Extra hyperbolam | Intra hyperbolam |
|---|---|---|
| 2 | 237170824512628449899917 | 237162487062045867846886 |
| 4 | 237166655750699903737556 | 237164571388054419219371 |
| 8 | 237165613567087322970403 | 237165092476425954356426 |
| 16 | 237165353021613523599438 | 237165222748948181485250 |
| 32 | 237165287885271907848389 | 237165255317105572320456 |
| 64 | 237165271601188 81041012 | 237165263459146597159038 |

hyperbolę ſector intra ſequentes terminos conſiſtit

| | |
|---|---|
| 237165266173160272103220 | 237165266173160458453029 |

Sit inter hos terminos maximus quatuor continuè arithmeticè proportionalium 237165266173160421183067; qui proinde erit verus hyperbolę ſector in notarum numero propoſito, quoniam primus triens notarum idem eſt in vtroque termino conuergente.

vt lectori cõpendiũ patefiat) seu logorithmus numeri $1\frac{24}{1000}$ posito logorithmo denarij arbitrario 230258509299404562401787000; deinde eodem supposito logorithmo arbitrario denarii, addatur logorithmus numeri 1000, seu triplus logorithmi denarii, logorithmo numeri $1\frac{24}{1000}$, eritque summa logorithmus numeri 1024, cuius pars decima erit logorithmus numeri binarij, pro eodem logorithmo denarij arbitrario, nempè 6931471805599452914171917: fiatq; vt logorithmus numeri denarij 23025850929940456240178700 ad logorithmũ numeri binarii corespondentẽ 6931471805599452914171917, ita logorithmus numeri denarii arbitrarius propositus nempe 10000000000000000000000000000 ad logorithmum numeri binarii quęsitum 3010299956639811952405804, quem inuenire oportuit: eodem modo inuenitur logorithmus ternarii 4771212547196624373502993, &c.

Vt in promptu habeantur numeri illi compositi parum inter se differentes pro vnoquoque numero primo, hic tabellam exhibeo pro numeris primis vsq; ad 100, & vnam regulam pro numeris primis inter 100 & 1000 & alteram pro numeris primis supra 1000; quæ omnia itá excogitata sunt, vt verus cuiuscunque numeri primi logorithmus inueniri possit correspondens logorithmo arbitrario denarii 10000000000000000000000000 ex vna sola multiplicatione, duabus diuisionibus & vna radicis quadratæ extractione, vltra inconsiderabiles aliquot operatiunculas.

| | |
|---|---|
| 2 | 1000 (3) 10<br>1024 (10) 2 |
| 3 | 32805 factus ex 5 & 6561 (8) 3<br>32768 (15) 2 |
| 7 | 2400 factus ex 3 & 32 (5) 2 & 25 (2) 5<br>2401 (4) 7 |

11 9800 factus ex 2, 49 (2) 7 & 100 (2) 10
9801 factus ex 121 (2) 11 & 81 (4) 3

13 123200 factus ex 7, 11, 25 (2) 5, 64 (6) 2
123201 factus ex 169 (2) 13 & 729 (6) 3

17 2600 factus ex 13, 8 (3) 2 & 25 (2) 5
2601 factus ex 9 (2) 3 & 289 (2) 17

19 28899 factus ex 169 (2) 13, 9 (2) 3 & 19
28900 factus ex 100 (2) 10 & 289 (2) 17

23 25920 factus ex 10, 32 (5) 2 & 81 (4) 3
25921 factus ex 49 (2) 7 & 529 (2) 23

29 613088 factus ex 17, 23, 32 (5) 2, & 49 (2) 7
613089 factus ex 729 (6) 3 & 841 (2) 29

31 116280 factus ex 10, 17, 19, 4 (2) 2, & 9 (2) 3
116281 factus ex 121 (2) 11 & 961 (2) 31

37 165648 factus ex 3, 7, 17, 29, & 16 (4) 2
165649 factus ex 121 (2) 11 & 1369 (2) 37

41 1413720 factus ex 7, 10, 11, 17, 4 (2) 2 & 27 (3) 3
1413721 factus ex 1681 (2) 41 & 841 (2) 29

43 978120 factus ex 10, 11, 13, 19, 4 (2) 2, 9 (2) 3
978121 factus ex 529 (2) 23 & 1849 (2) 43.

47 664848 factus ex 7, 13, 32 (5) 2 & 729 (6) 3
664849 factus ex 961 (2) 31 & 2209 (2) 47

53 3059000 factus ex 7, 19, 23, 8, (3) 2, & 125 (3) 5
3059001 factus ex, 9 (2) 3, 121, (2) 11 & 2809 (2) 53

57 5851560 factus ex 3, 5, 13, 31, & 121 (2) 11
5851561 factus ex 1681 (2) 41 & 3481 (2) 59

3575880 factus ex 5,7,11,43,8 (3) 2 & 27 (3) 3
61 3575881 factus ex 961 (2) 31 & 3721 (2) 61

1620528 factus ex 3,13,16 (4) 2 & 49 (2) 7
67 1620529 factus ex 361 (2) 19 & 4489 (2) 67

71 2016399 factus ex 3, 11, 29,43 & 49 (2) 7
2016400 factus ex 16 (4) 2, 25 (2) 5 & 5041 (2) 71

5116644 factus ex 4 (2) 2,9 (2) 3,169 (2) 13,& 841 (2) 29
73 5116643 factus ex 7, 17, 19, 31, 73

5997600 factus ex 17,32 (5) 2, 9 (2) 3,25 (2) 5 & 49 (2) 7
79 5997601 factus ex 961 (2) 31 & 6241 (2) 79

1164240 factus ex 5, 11, 49 (2) 7, 16 (4) 2, 27 (3) 3
83 1164241 factus ex 169 (2) 13 & 6889 (2) 83

2859480 factus ex 5,47,8 (3) 2, 169 (2) 13 & 9 (2) 3
89 2859481 factus ex 361 (2) 19 & 7921 (2) 89

1138488 factus ex 3,13,41, 89, & 8 (3) 2
79 1138489 factus ex 121 (2) 11 & 9409 (2) 97

Pro numeris primis inter 100 & 1000 ſit hæc regula: ante numerum primum cuius logorithmus quæritur, ſumantur immediatè duo numeri proximi, & poſt eum numerus immediatè ſequens, qui tres numeri cum illo primo ſunt quatuor numeri in ſuo naturali ordine ſe inuicem ſequentes; deinde multiplicetur primus numerus in cubum tertij & quartus in cubum ſecundi, eritque factorum differentia æqualis ſummæ primi & quarti vel ſecundi & tertij, vt facile demonſtrari poteſt; iſtique numeri facti habent ad minimum ſex notas primas omnino eaſdem, & proinde parum inter ſe differunt; atque omnium horum quatuor numerorum (excepto tertij) logorithmi cognoſcuntur ex ipſa progrediendi methodo, & ideò ad noſtram abbreuiationem ſunt idonei, in numeris vltra 1000 non opus eſt tanto apparatu, quoniam rectangulum numerorũ, inter quos immediatè comprehenditur numerus primus cuius quęritur logorithmus,

vnitate

vnitate solummodo deficit à quadrato numeri primi; eorũque ideo primę sex notæ ad minimum sunt eædem; atque primi & tertii dantur logorithmi, & ideo ad nostrum institutum sunt idonei.

## PROP. XXXIV. PROBLEMA.

*Ex dato logorithmo inuenire eius numerum.*

EX demonstratis manifestum est hoc problema idem esse ac si quis proponeret; ex dato spatio hyperbolico, & vna recta vni asymptotorum parallela illud comprehendente, alteram inuenire idem spatium comprehendentem, & eidem asymptoto parallelam. consideretur ex quot notis arithmeticis constet logorithmus denarij arbitrarius; & sumatur logorithmi vel spatij dati talis pars aliquota nempe spatium LIKM, vt pentagoni spatio LIKM regulariter circũscripti, & hexagoni eidem regulariter inscripti toties multiplicia, quoties spatium datum multiplex est spatii LIKM, concordent in tot notis arithmeticis, quot continet radix quadrata logorithmi arbitrarij; hoc enim facilè fieri potest ex inspectione tabellæ 32 huius: datur ergo spatij LIKM mensura & recta IK vnitas ex suppositione. sit LM, $z$; sicut in huius 32 datur pentagonum spatio LIKM regulariter circumscriptum & hexagonum eidem regulariter inscriptum, inter quæ spatium datum LIKM est secunda duarum mediarum arthmeticè continuè proportionalium; & ideò duplũ hexagoni vna cum pentagono æquatur triplo spatij, cuius æquationis resolutio manifestat ignotam $z$ seu numerum LM, cuius toties multiplicatus, quoties spatium LIKM est submultiplex spatij vel logorithmi dati, est numerus quæsitus, quem inuenire oportuit.

Hoc problema idem est cum huius 8, sed aliter generalius & methodo plerumque minus operosa hic resolutum.

PROP.

## PROP. XXXV. PROBLEMA.

*Recta per datum punctum in diametro ducta, semicirculum in ratione data diuidere.*

SIt semicirculus ADG, cuius diameter AG, centrum E, punctum in diametro datum B. supponatur factum quod iubetur; sitque recta BD semicirculum diuidens in ratione data: quoniam datur semicirculi mensura & ratio in qua diuiditur, igitur datur eius portio nempè DBG. sit recta BD, z: ex datis rectis BD, BE, ED, in notescunt triãgula DEB, DEF, DEG: deinde sit vt DEF vna cum DEG ad DEG ità duplum DEG ad trapezium circũscriptum DEGH: & positis primis terminis conuergentibus DEG, DEGH continuetur series conuergens polygonorum complicatorum, secundum circuli proprietates sæpius repetitas, donec conueniens fuerit approximationem adhibere ita vt exhibeatur sector DEG, qui vna cum triangulo DBE æquatur portioni DBG cognitæ, cuius æquationis resolutio manifestat ignotam quantitatem z seù rectam BD: reliqua patent.



Idem problema eodem omnino modo resoluitur in ellipse, hyperbola vel earum sectore dato.

## SCHOLIVM.

SI quis prædictorum problematum mechanicam deſideret praxem; non difficile erit calculum, approximationẽ, & æquationis reſolutionẽ ſecundũ vulgatas Geometriæ practicæ regulas quodãmodo imitare. multa talia problemata poſſem hic reſoluere ope analyſios & noſtræ ſerierum conuergentium doctrinæ, quæ antea impoſſibilia æſtimabantur; ſed dicet fortè aliquis has reſolutiones non eſſe geometricas; reſpondeo, ſi per geometricum intelligatur praxis ope ſolius regulæ & circini peracta, hanc in his non ſolum eſſe impoſſibilem ſed etiam in omnibus problematis quæ ad æquationem quadraticam reduci non poſſunt, ſicut facile demonſtrari poſſet; & ſi per geometricum intelligatur reductio problematis ad æquationem analyticam, omnia hæc problemata ſunt geometrice impoſſibilia, cum ex hic demonſtratis, manifeſtum ſit talem reductionem fieri non poſſe; ſi verò per geometricum intelligatur methodus omnium poſſibilium ſimpliciſſima; inuenietur fortaſſe poſt maturam conſiderationem omnia prædicta problemata eſſe geometriciſſimè reſoluta. diligenter animaduertendum totam ſerierum conuergentium doctrinam poſſe etiam nullo negotio applicari ſeriebus ſimplicibus. ſit enim ſeries A,B,C,D,E, &c, talis naturæ vt tertius terminus C eodem modo componatur ex primo & ſecundo A,B, quo quartus D componitur ex ſecundo & tertio B,C, & quintus E ex tertio & quarto C,D, & ſic deinceps in infinitum; ſitque differentia antecedentium A,B, maior ſemper differentia immediatè ſequentiũ B,C; ſupponamus hanc ſeriem ita in infinitum continuari donec duorũ terminorũ immediate ſe inuicẽ ſequentium nulla ſit differentia, ſitque vnus ex illis terminis z, quem ſeriei terminatio-

A
B
C
D
E
z

nem

nem appellamus: dico $z$ eodem modo componi ex A & B quo ex B & C vel C & D; demonſtratio vix differt ab huius 10 & eius conſectario: hac ratione ſi ponatur triangulum, ſectori circulari vel elliptico inſcriptum, vel ſectori hyperbolico circumſcriptum $a$, & trapezium, ſectori circulari vel elliptico regulariter inſcriptum vel hyperbolico regulariter circumſcriptum $b$; erit hexagonũ ſectori circulari vel elliptico regulariter inſcriptum vel hyperbolico regulariter circumſcriptum $vq\,\frac{2b3}{a+b}$; & proinde ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ eodem modo componitur ex $a$ & $b$ quo ex $b$ & $vq\,\frac{2b3}{a+b}$; atque hinc etiam demonſtrari poteſt, quod ratio inter ſectorem & eius triangulum datum non ſit analytica, ſecundum tenorem huius 11: poſſem quoque adhuc alia methodo particulari demonſtrare arcum circularem non habere rationem analyticam ad ſuam chordam datam: ſed plura non addo, geometras interim pro ſcientiæ incremẽto admonens, me reperiſſe in quibuſdam figuris (quas Carteſius ſecundi generis appellat) tres focos, ſeu tria pũcta, à quibus ductarũ in quodlibet curuæ punctum rectarum ſumma vel differentia ſemper eſt eadem: vnde mihi veriſimile videtur ſicut omnis curuæ primi generis duos habent focos vel reales vel imaginarios, ita omnes ſecundi generis habere tres, omnes tertii quatuor, & ſic in infinitum: quæ certè ſpeculatio ſcrutatu digniſſima eſt, eſſet enim admiranda figurarum geometricarum proprietas, & mechanicæ omnium æquationum praxi vtiliſſima.

# FINIS.

Anno Dom: 1667.

# POSTSCRIPTVM.

PRopoſui tria problemata R. P. Franciſco Eſchinardo e S. Ieſù (dum inter nos ageretur de quiſquiliis quibuſdam opticis) promiſique, illo & aliis ſilentibus, geometricam eorum omnium ſolutioné exhibere, dummodo a Mathematico per literas a me requireretur; ille autem abſq; vllo reſponſo familiaribus ſuis matheſeos ignaris paſſim ſignificauit (ſicut ego ab amicis meis intellexi) mea problemata eſse trita, vulgaria, ab Archimede & Lalouera ſoluta, neque reſponſione digna: & proinde ego eadem problemata hic euulgo, Mathematicorũ iudicia implorans num hæc problemata a quouis vnquam vllo modo ſint ſoluta, vel ſi ita inutilia & facilia ſint vt mathematici contemplatione ęſtimari poſſint indigna: ſunt autem ſequentia.

## IN OPTICIS.

*Lentem vitri ſphæricam datæ craſſitiei efficere cuius ope oculus, viſus diſtantiam habens cognitam, percipiat viſibile in diſtantia data a lente remotum quantumlibet auctum cum diſtincta viſione; aſſignata etiam oculi a lente diſtantia,*

## IN GEOMETRICIS.

*Curuæ parabolicæ vel eius portionis datæ centrum grauitatis inuenire, ſuppoſita circuli & hyperbolæ quadratura.*

## IN ASTRONOMICIS.

*Corporis cuiuſcunque cæleſtis parallaxes quotcunque inuenire, ſuppoſito corpus cæleſte moueri in ſectione conica ſiue circa terram ſiue circa ſolem.*

Miror

Miror certe R. virum ita loquutũ eſſe; Archimedes enim & Lalovera nihil vnquam ſcripſerunt (ſaltē quod ad æuum noſtrum peruenit) nec in optica nec in aſtronomia; oportet ergo vt loquatur de problemate geometrico: at Guldinus Ieſuita & ordinis etiam princeps geometra non ſine ratione gloriatur, pag. 23 ſuę centrobaricæ tomo primo anno 1635 edito, ſe eſſe omnium primum, qui vnquam aliquid demõſtrauit de centris grauitatis linearum; ingenue tamen fatetur, tom: primo centrob: pag. 65, ſe nihil potuiſſe proficere vltra centra grauitatis linearum rectarum & circularium: nihilominus prędictus R.P. affirmat centrum grauitatis curuæ parabolicę inuentum eſſe ab Archimede viginti quaſi ſeculis ante noſtra hæc tempora: ſed non opus eſt de re manifeſta plura dicere; ſatis enim percipio R. virũ in eo lapſum eſſe, quod (in philoſophiæ, quam matheſeos, ſtudiis potius verſatus) crediderit lineam curuam parabolicam, de qua loquimur nos, eſſe ſuperficiem planam parabolicam, de qua ſcribunt Archimedes & Lalouera.



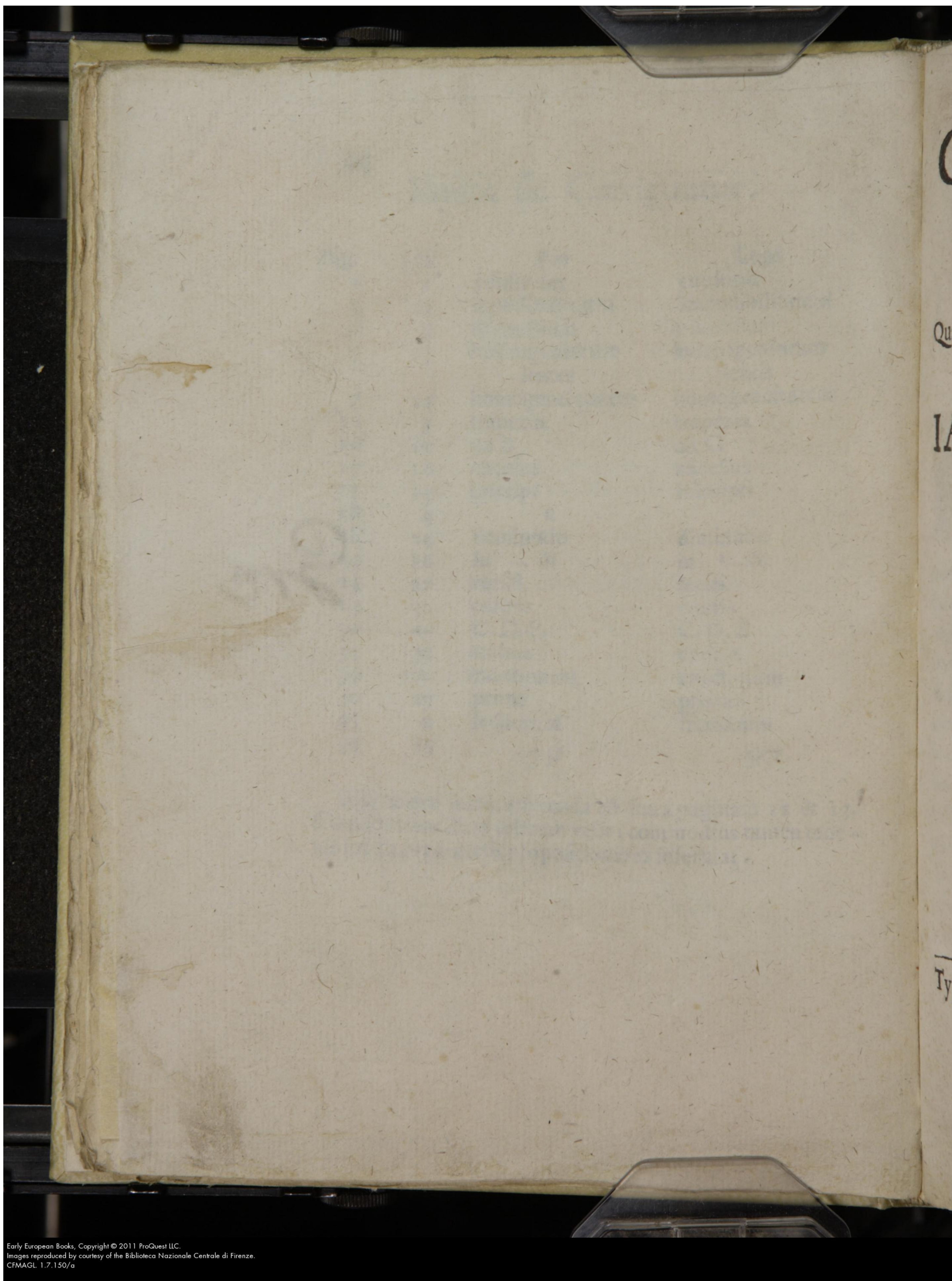
Errata

# Errata sic Corriguntur.

| Pag. | Lin: | Pro | Lege |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | constitum | constitui |
| 4 | 14 | inpossibilitatem | impossibilitatem |
| 6 | 9 | strinomium | trinomium |
| 7 | 23 | hestrogeniorum lentes | heterogeniorum lentis |
| 7 | 24 | homogeneietatem | homogeneitatem |
| 12 | 5 | trapeziæ | trapezia |
| 16 | 10 | ad B | ad C |
| 17 | 10 | excesus | excessus |
| 17 | 14 | inscripi | inscripti |
| 18 | 4 | a | a |
| 18 | 24 | deminutio | diminutio |
| 19 | 16 | in & | in a & |
| 24 | 21 | reriei | seriei |
| 24 | 32 | omnes | omnis |
| 30 | 20 | C, D, F, | C, D, E |
| 35 | 33 | eadem | eodem |
| 39 | vlt: | exactionem | exactiorem |
| 40 | 27 | prima | primus |
| 45 | 2 | sectiorum | sectionum |
| 55 | 15 | 79 | 97 |

Figura ære incisa inserenda est intra paginam 12 & 13, si modo lector illam inserere velit: commodius tamen teneatur soluta, vt diuersis propositionibus inseruiat.

63



# GEOMETRIÆ PARS VNIVERSALIS,

Inserviens

Quantitatum Curvarum transmutationi & mensuræ.

*AVTHORE*

IACOBO GREGORIO ABREDONENSI SCOTO.






PATAVII, MDCLXVIII.

Typis Heredum Pauli Frambotti, *Superiorum Perm.*
CVM PRIVILEGIO.



# PROŒMIVM.





*Bſeruatum eſt à noſtri ſeculi geometris mathematicam ab antiquis malè fuiſſe diuiſam in geometriam, arithmeticam, &c, ſed potius in vniuerſalem & particularem: Matheſeos pars vniuerſalis tractat de proportione in communi abſtrahendo ab omni quantitatis ſpecie, quæ communiter (etiamſi fortaſsis abuſiue) geometria appellatur, cui affinis eſt recentiorum analytica: matheſeos pars particularis diuiditur; in geometriam propriè ſic dictam, quæ nihil aliud eſt niſi matheſeos pars vniuerſalis figuræ reſtricta; in arithmeticam, quæ eadem eſt matheſis vniuerſalis numero, et ſtaticam, quæ eadem eſt motui reſtricta, &c. ego (ni fallor) idem video in geometria: cum enim obſeruarem generaliſsimos analyſeos canones omni problemati inſeruire, dummodo poſsibile ſit illos applicare, & analyſem nihil aliud eſſe niſi examinationem quantitatum ignotarum, donec tandem reducantur ad æquationes cum quantitatibus cognitis; cogitabam analyſeos defectum (quæ præcipuè apparet in menſuratione*

*quantitatum curvarum) posse aliquatenus suppleri; si modo e data cuiuscunque figuræ proprietate essentiali, daretur methodus eam transmutandi in aliam æqualem cognitas proprietates habentem, & huius in aliam, & sic deinceps, donec tandem transmutatio fiat in aliquam quantitatem cognitam; sic enim exhiberetur quantitatis propositæ mensura quæsita, non secus quam in æquationis analyticæ resolutione. neque existimo meam opinionem esse frustratam, puto enim hunc tractatulum continere geometriæ partem adeo vniuersalem, vt nullam respuat particularem figuram eorum generum, quæ a geometris adhuc contemplata sunt; quod si alia figurarum genera contemplanda sibi proponant, promouenda est hæc scientia; sicut enim figurarum genera sunt infinita, etiam hæc geometriæ pars, sicut omnis alia, infinita erit; nihilominus multo breuius & elegantius erit vniuersalem doctrinam unicuique particulari casui secundum figuræ proprietates applicare, quam de vnaquaque figura integrum uolumen euulgare. Huius methodi studiosus ante omnia versatus esse debet in analyse, nam absque illa, cuiusvis ingenii vires superat, propositæ cuiuscunque figuræ proprietates examinare.*

*Non diffiteor me legiße apud præstantes geometras multa talis methodi vestigia, sed plerumque vel particulariter vel parum geometricè demonstrata; quæ mea sunt & quæ aliena, iudicet lector, qui hunc tractatulum cum aliorum comparauerit, ego enim nihil affirmo, ne videar ea mihi adscribere quæ ab alijs (me etiam inscio) antea reperta sunt. Demonstrandi methodo utor (ni fallor) mihi peculiari, quippe multo*

bre-

breuiore quam Archimedea & non minus geometrica; utor quoque in propositionibus magis obviis methodo Caualleriana, quæ etiam nullo negotio reducitur ad Archimedeam vel nostram. Quod si geometra, post diligentem huius methodi applicationem secundum figuræ proprietates, nullum inueniat problematis exitum; recurrendum est ad seriem convergentem, cuius terminatio sit ipsa figura incognita vel alia ad eam in ratione data; ob hanc enim rationem, conatus sum aliarum figurarum proportiones reducere ad proportionem inter figuras planas, in his enim existimo faciliorem esse serierum conuergentium doctrinam: non tamen audeo affirmare seriem conuergentem semper posse inveniri; suspicor enim hanc methodum esse insufficientem ad omnes proportiones non analyticas inveniendas: vtcunque nostrum tractatulum de vera circuli & hyperbolæ quadratura volumus eße vltimum nostræ methodi refugium, nam serierum convergentium doctrina est generalis, quæ e figuræ proprietatibus semel inuenta solutionem posibilem exhibebit; & proinde obiectionibus contra nostram doctrinam hic satisfaciamus.

Primo obiicitur contra titulum, nempe tractatum meum male appellari veram circuli & hyperbolæ quadraturã, cum potius sit conatus demonstrandi illam eße impossibilem; respondeo, si esset impossibilis, nulla daretur proportio inter circulum & diametri quadratum, & ideo falsa esset 5 definitio lib. 5. Euclidis; si autem sit possibilis, monstrandus est nostræ error, si nostra vera non sit. Alii sic obiiciunt: hæc quadratura nulla est, quoniam non assignatur proportio inter cir-

culum & diametri quadratum; huic obiectioni respondeo, posito circuli diametro $b$, erit ipse circulus terminatio seriei conuergentis, cuius primi termini sunt $\frac{b^2}{2}$, $b^2$, & secundi

$Vq\frac{b^4}{2}$, $\frac{2b^4}{b^2 + \sqrt{q2b^4}}$; & proinde quadratum diametri est ad circulum ut $b^2$ ad prædictam terminationem, quæ terminatio nobis nullo modo est magis incognita quam radix surdesolida numeri 40. dicunt alii non bene esse demonstratum (in scholio prop. 5) sectorem *A B I P* eundem esse cum terminatione seriei conuergentis, cuius primi termini sunt triangulum *ABP* & trapezium *ABFP*, & secundi, rectilinea *ABIP*, *ABDLP*: & proinde plenam demonstrationem hic subiicio: si sector & prædicta terminatio non sunt æquales, sit inter illas differentia *Z*; & producatur series conuergens donec termminorum conuergentium (nempe *P* & *Q*) differentia sit minor quam *Z*, euidens enim est (ex prop. 6.) hoc fieri posse; hisce positis, patet tam sectorem quam seriei terminationem consistere inter terminos *P* & *Q*; & proinde quatuor sunt quantitates, quarum maxima & minima sunt *P* & *Q*, intermediæ autem sector & terminatio seriei, eritque differentia intermediarum nempe *Z* maior quam differentia extremarum, quod est absurdum, nulla ergo est differentia inter sectorem & seriei terminationem, & proinde æquales sunt, quod demonstrandum erat. Alii obiiciunt contra prop. 11. ita; si addatur $a3$ termino $a3 + a^2b$ & termino $ba^2 + b^2a$, eneruetur vis utriusque demonstrationis; respondeo $a3$ esse quantitatem inde-

defi-

definitam & alias quantitates indefinitas præter ipsos terminos conuergentes compositionem non poße ingredi, quod analystam latere non potest. Obiiciunt alii: hac eadem methodo potest demonstrari inter duas quantitates indefinitè commensurabiles P, Q, non posse inueniri mediam proportionalem illis commensurabilem, quod tamen est falsum si P, Q, sint planosimiles; respondeo maximam esse discrepantiam inter radicum extractionem & sextam illam operationem, nam in radicum extractione, cum diuisor diuidendum metitur, quod in prædicto casu euenit, radicis extractio coincidit cum quatuor operationibus prioribus, sexta autem operatio, cum ex natura sua sit infinita, cum prioribus nunquam coincidit. Obiicit quidam non vulgaris geometra circuli quadraturam ope quadraticis peractam eße operationibus analyticis; quod omnino nego desiderando ab affirmante, vt illas operationes analyticas assignet, ego enim existimo basem quadraticis non èsse magis assignabilem ab operationibus analyticis, quam radicem quadratam binarij à primis quatuor operationibus arithmeticis.

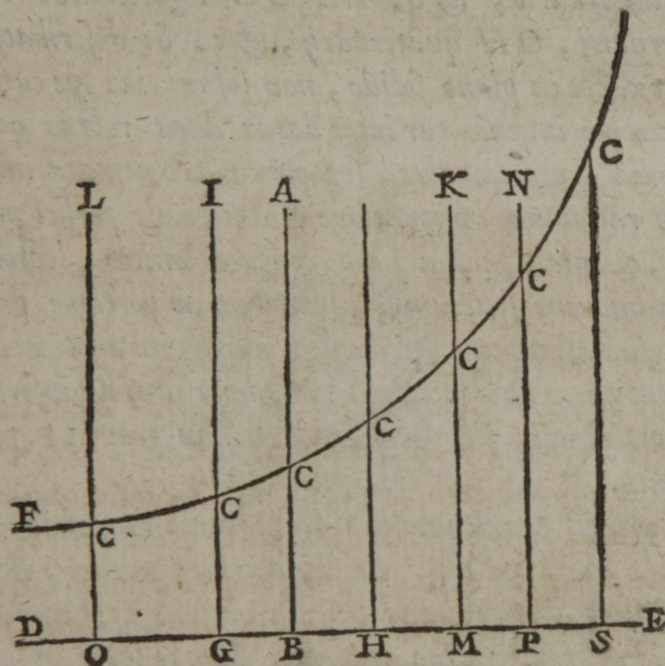
Solutis obiectionibus quæ contra nostram doctrinam vel ab aliis afferuntur vel a me imaginari possunt, satisfaciamus etiam illis, qui operationibus organicis delectantur. Si quis velit organicè circulum quadrare vel angulum in ratione data diuidere; non existimo ullum modum esse simpliciorem quam vulgaris linea quadratrix in materia aliqua solida & plana accurate & punctatim descripta. Quod ad quadraturam hyperbolæ attinet, existimo satis facile esse triangulì,

guli, ſeu trapezij inſcripti (ſunt enim inter ſe æqualia) ad triangulum circumſcriptum rationem in rectis exhibere, & ab illis rectis ſeriem debitam conuergentem continuare, donec conueniens fuerit approximationem adhibere. Omnia quæ deſiderari poßunt de logorithmis & rationum compoſitione ope ſequentis curuæ nullo negotio inueniri poßunt.

Sit linea recta DE, ſitque alia recta illi normaliter inſiſtens AB, in qua ſit punctum mobile C, quod punctum C moueatur ea ratione, vt, dum perpendicularis mouetur verſus E vel D normaliter ſemper inſiſtens rectæ ED, interceptæ inter punctum C & rectã DE ſint ad ipſam CB in rationibus inter ſe multiplicatis in ratione motus rectæ perpendicularis AB: e.g. moueatur AB in KM & NP; oportet ut punctum C moueatur ea lege, vt ratio CP ad CB ſit multiplicata rationis CM ad CB in ratione PB ad MB: eodem modo ad partes D, ſuppoſito AB moueri in IG & LO, vt punctum C ea lege moueatur, ut ratio CO ad CB ſit multiplicata rationis CG ad CB in ratione OB ad GB: atque è recta DE & duobus punctis curuæ quæſitæ a motu puncti C deſcriptæ ad libitum datis, facile eſt curuam ipſam punctatim deſcribere, e.g. ſuppoſito curuam in rectis AB, KM, tranſire per punctum C, oportet alia huius curuæ puncta inuenire: diuidatur BM bifariam H, ſitque perpendicularis HC media proportionalis inter BC, MC; dico C eſſe vnum ex punctis quæſitis, eſt enim ratio CM ad CB duplicata rationis CH ad CB, & recta MB eſt dupla rectæ BH, eſt igitur C in curua quæſita. Deinde ſit recta SM æqualis rectæ MB, &

ut

ut CB ad CM ita CM ad perpendicularem C S, ut prius demonstratur C eſſe punctum curuæ quæſitæ; atque hac ratione poſſunt inueniri puncta quotlibet, & curua quantumlibet produci. Notandæ ſunt quædam huius curuæ proprietates exi-




miæ, quæ nullo negotio deprehenduntur; prima eſt, quod ex vtraque parte poſſit produci in infinitum; ſecunda, quod ex vna parte nempe F, licet rectam E D ſemper magis appropinquet, nunquam tamen cum illa concurrat, efficiens ſpatium ex parte FD finitum in quantitate etiamſi infinitum in

lon-

longitudine; tertia, quod, posita vna perpendicularium seu ordinatim applicatarum loco vnitatis, & reliquis loco numerorum, intercepta recta in DE seu curuæ asymptota inter vnitatem & numerum semper sit logorithmus numeri; e.g. posita CO vnitate & CG binario, item CB ternario, CH quaternario, &c; erit OG logorithmus binarii, OB ternarij, OH quaternarij, &c. Si describatur hæc curua exactè in plano solido, non solum eius ope cum regula & circino inuenientur inter datas duas rectas quotcunque mediæ proportionales, sed omnia problemata imaginabilia de rationum compositione etiam facile perfici possunt; sed hæc, quoniam facilia sunt, consultò omitto, lectorem interim admonens spatium, contentum à portione prædictæ curuæ, sua asymptota & duabus ordinatim applicatis, non habere rationem analyticam ad rectangulum illi inscriptum, sicut demonstrari poßet secundum tenorem prop. 11. prædicti tractatuli.

Hæ operationes non existimari debent ageometricæ, quoniam sola ope regulæ & circini non perficiuntur, sicut optime obseruat subtilissimus Mathematicus D. Carolus Renaldinius in geometra suo promoto, dum tractat de nouis illis lineis, quas Mediceas appellat; quod ut clarius fiat, hic conabor ostendere nullam vel æquationem cubicam posse resolvi ope solius regulæ & circini: omnis æquatio cubica habet vel vnam solam vel tres radices reales, quæ si inuenirentur ope solius regulæ & circini, seu intersectione circuli & lineæ rectæ, linea recta circulum secaret vel in uno

solo

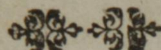
*solo puncto vel in tribus, quod utrumque est absurdissimum: ob similem etiam rationem, æquatio cubica tres habens radices reales nunquam potest reduci ad puram, quæ unicam tantum habet: nam in his æquationis reductio nullo modo proficiet, cum impossibile sit eius ope radicem imaginariam in realem mutare vel è contra.*



906

# METHODVS VNIVERSALIS

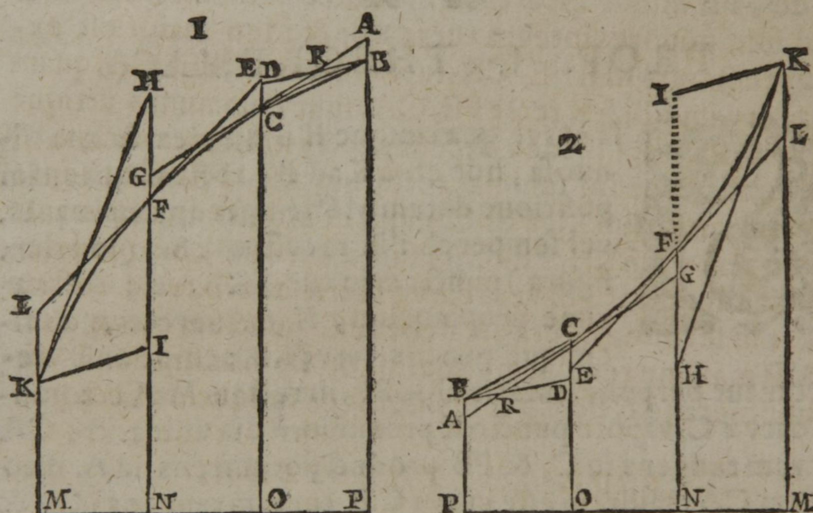
*Transmutandi, & mensurandi quantitates curvas.*



## PROP. I. THEOREMA.

SIt curva quæcunque KB simplex & non sinuosa, hoc est à K ad B, rectam quandam positione datam M P semper appropinquās, vel semper ab illa recedens. Sit (in prima figura) punctum in curva K B rectę M P maxime propinquum, K. ex duobus quibuscunque punctis curvę KB, nempe C, B, demittantur perpendicularis CO, BP, in rectam M P, & à puncto curvæ C, vtpote puncto K proximiore ducatur recta CA curvam tangens in C, & PB productę occurrens in A. dico rectam CA majorem esse curva CB. curvam tangens in B, & rectę CA occurrens in R, & OC productę in D, ducatur recta BRD. quoniam in progressu a K ad B, curva KB semper magis elongatur a recta P M, igitur recta BD curvam tangens in puncto B, & vergens versus K e contra tendit ad concursum cum recta PM, & ideo angulus ABR est obtusus, superans nempe rectum MPB illo angulo, in quo cum PM producta concurrit, est igitur angulus ABR major angulo RAB, & latus AR maius latere BR, & commune addendo, recta AC maior est rectis BR, RC. sed BR, RC, curvam tangentes in punctis B, C, sunt maiores arcu BC; & ideo AC recta eodem arcu CB est multo maior, quod demonstrare oportuit.

2
Secundo dico BD rectam minorem esse curva BC. ex hactenus demonstratis, angulus ABD est obtusus; & proinde etiam, ob parallellas AP, DO, illi æqualis CDB; & ideo ducto subtendente CB, angulus BDC maior est angulo BCD, & recta DB minor recta BC, sed recta BC minor est curva BC, & ideo recta BD multo minor est curva BC. ex




punctis extremis K, B, in rectam MP demittantur perpendiculares KM, BP; deinde diuidatur recta MP in partes quotcunque æquales MN, NO, OP, & à punctis P, O, N, M, erigantur perpendiculares PA, OE, NH, ML, curvam secantes in punctis B, C, F, K, in quibus singulis ducantur rectę curvam tangẽtes versus B a perpendicularibus proximis terminatę, nempe KH, FE, CA, & in puncto B sit tangens BD a perpendiculari proxima versus K terminata in D, sitque rectę BD parallella KI: manifestum est KH maiorem esse recta KI ob angulum HIK obtusum æqualem angulo ABD.

Dico omnes rectas KH, FE, CA, simul maiores esse curva

KB & excessum rectę HK supra rectam KI maiorem esse excessu omnium rectarum KH, FE, CA, simul supra curvam KB. producantur tangentes AC, EF, ad proximas perpendiculares versus K in G & L. ex primo proposito, AC est maior curva BC, EF maior curva FC, & HK maior curva KF; & ideo omnes simul KH, FE, CA, sunt maiores integra curva KB: deinde ex secundo proposito BD, hoc est, KI minor est curva BC; & CG, hoc est, CA minor est arcu FC; & LF, hoc est, FE minor est arcu KF; & ideo omnes KI, FE, CA, simul sunt minores integra curva KB; & ideo maior est excessus rectarum KH, FE, CA, supra rectas KI, FE, CA, quam supra curvam KB; sed rectę FE, CA, sunt communes utrique rectarum summę; & ideo excessus rectę KH supra rectam KI est æqualis excessui summæ rectarum KH, FE, CA, supra summam rectarum KI, FE, CA; qui demonstratus est maior excessu rectarum KH, FE, CA, supra curvam KB, quod demonstrandum erat. Si vera curva fuerit convexa ad rectam MP, vt in secunda figura, K debet esse punctum curvæ a recta MP maxime remotum, & aliquot demonstrationũ verba sunt mutanda, sicut per se intelliget industrius Lector.

## *PROP. 2. THEOREMA.*

SIt curva quæcunque 79 CD simplex, seu non sinuosa (si enim fuerit sinuosa, oportet illam in plures simplices diuidere) super qua imaginetur superficies cylindrici recti, cuius altitudo recta X. a puncto quolibet curuæ nempe 9 in quamlibet rectam nempe 26 demittatur recta perpendicularis 93. & ducatur in eandem 26 recta 96 curvam perpendiculariter secans in puncto 9. producatur recta 39 in S, ut 3S fiat æqualis rectę 96, idem quoque supponatur fieri in omnibus punctis curvæ 79 CD, ita vt ex rectis in curvam perpendicularibus per propria sua curvę puncta ad rectam 26 normaliter protractis confletur spatium RV δ2 à

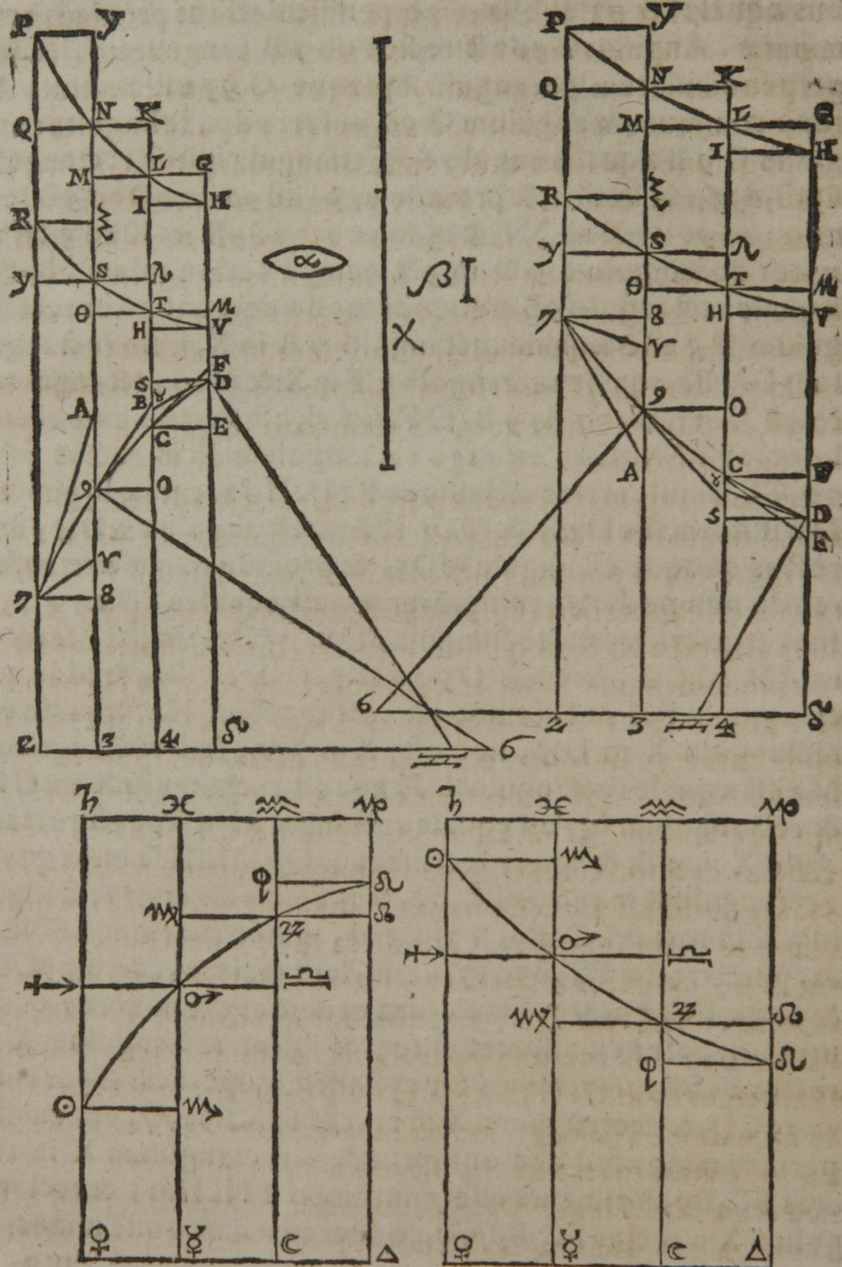
curva RSTV & rectis R 2, V δ, δ2, comprehensum. Deinde fiat ut 93 ad S3 ita X altitudo cylindrici ad 3 N; idem fieri supponimus in omnibus aliis rectis spatii RV δ2 rectę 2δ perpendicularibus, ut compleatur spatium PH δ2 comprehensum a curva PH & rectis H δ, P 2, 2δ: hoc est intelligo duo mixtilinea esse descripta, quorum primi hæc est proprietas, ut ex eius curvæ puncto quocunque S in rectam 26 demissa perpendicularis S3 sit æqualis perpendiculari ad curvam 79 CD in puncto transitus 9 nempe 96. secundi vero hæc sit proprietas, vt ex eius curvæ puncto quocunque N in rectam 26 demisśa perpēdicularis N3 sit ad altitudinem cylindrici X, vt eius pars intercepta in primo mixtilineo S3 ad eius partem interceptam à curva data 93. dico mixtilineum secundum PH δ2 esse æquale superficiei cylindrici recti, cuius basis est curva data 79 CD, & altitudo recta X. Si mixtilineum PH δ2 non est æquale superficiei cylindrici prædicti, inter illas erit aliqua differentia, quæ sit α planum: applicetur α planum ad rectam X, sitque latitudo inde oriens β. ducatur ex puncto 7 recta 7 A curvam 7 D tangens in pūcto 7, & ex puncto D ducatur recta D♉ curvam tangens in puncto D, sitque rectę D♉ parallella 7 γ, & ex punctis 7, D, in rectam 26 demittantur perpendiculares 72, δD; dividaturque recta 2 δ in tot partes æquales, ut ab extremitate earum primæ erecta perpendiculari 3 A, excessus tangentis abscissæ 7 A supra parallellam abscissam 7 γ sit minor recta β, hoc enim semper fieri posse manifestum est, si tangens 7 A non sit perpendicularis rectę 2 δ, nec curva data sinuosa. a diuisionum punctis 2, 3, 4, δ, excitentur perpendiculares 2 P, 3 N, 4 L, δH, curvam datam secantes in punctis 7, 9, C, D; curvam primā inventam secantes in punctis R, S, T, V, & secundam in punctis P, N, L, H; deinde curvam datam tangentes in punctis 7, 9, C, D, ducantur rectæ 7 A, 9 B, CF, D♉, a proximis perpendicularibus terminatæ, sintque rectæ 78, 9○, CE, D5, YP, NK, LG, HI, LM, NQ, ipsis partibus æquali-

bus

bus æquales & parallellæ, à perpendicularibus proximis terminatæ. Angulus B 96 est rectus ob 9 B tangentem, & illi perpendicularem 96; angulus quoque O 93 est rectus, & ideo communem angulum O 96 auferendo, relinquitur angulus O 9 B æqualis angulo 693; triangula igitur rectangula O9B, 693, sũt similia, & proinde ut 93 ad 96 ita 9O ad 9B, sed ut 93 ad 96 ita X ad 3N; & ideo ut 9O ad 9B ita X ad 3 N; & igitur rectangulum 9 O in 3N nempe rectangulum N4 est æquale rectangulo 9B in X: eodẽ modo demonstratur rectangulum P 3 esse æquale rectangulo 7 A in X, item rectangulum L♂ esse æquale rectangulo CF in X; & ideo rectangulum rectæ X in rectas 7 A, 9 B, C F, simul, est æquale toti rectilineo 2PYNKLG♂; est ergo rectangulum X in rectas 7A, 9B, CF, simul, maior mixtilineo P N L H ♂2. curvæ in puncto D fiat normalis D♊, & ideo rectus est angulus ♊D♉, sed rectus quoque est angulus ♂D5, & proinde commune auferendo nempe ♂D♉, relinquũtur anguli æquales ♂D♊, ♉D5; sunt ergo triangula rectangula ♂D♊, ♉D5, similia; & ideo ut ♂D ad D♊, hoc est D5 ad D♉ ita X ad ♂H, & ideo rectangulum ♂H in D5, hoc est rectangulum H4, æquale est rectangulo X in D♉, hoc est, X in 7 ♈; sed rectangulum M4 est æquale rectangulo L ♂, hoc est rectangulo X in CF; & rectangulum Q3 est ęquale rectangulo N4, hoc est rectangulo X in 9 B; & igitur rectilineum QNMLIH♂2 est æquale rectangulo X in rectas FC, B9, ♈7, simul; est ergo rectangulum X in rectas FC, B9, ♈7, simul, minor mixtilineo PNLH ♂2. porro rectæ FC, B9, A7, simul, sunt maiores curva 79CD, & rectæ FC, B9, ♈7, simul, sunt eadem curva minores, quod utrumq; patet ex antecedente; & igitur rectangulum X in rectas FC, B9, A7, maius est cylindrica superficie super curva 79CD, & rectangulum X in rectas FC, B9, ♈7, eadem superficie minus: sed demonstratum est rectangulum X in rectas FC, B9, A7, maius esse mixtilineo PNLH♂2, & rectangulum X in rectas FC, B9, ♈7, eodem mixtilineo esse minus, &

pro-

6



proinde maior est differentia inter hæc rectāngula, quā inter superficiem cylindricam & mixtilineum; sed rectangulorum differentia est rectangulum X in differentiam rectarum 7A, 7γ; est autem differentia rectarum 7A, 7γ, minor recta β ex suppositione; & ideo differentia inter rectangula X in FC, B9, A7, simul, & X in FC, B9, γ7, simul, minor est quantitate α, nempe facto ab X in β, hoc est ex positione, differentia inter superficiem cylindricam & mixtilineum, quod est absurdum, ostensa enim est maior, superficies igitur cylindrica & mixtilineum sunt æqualia, quod demonstrandum erat.

Quod si curua 7D non fuerit simplex sed sinuosa, dividenda est in plures simplices, & demonstratio in vnaquaque seorsim instituenda.

Si vero tangens 7A fuerit perpendicularis ad rectam 78, mixtilineum PNLHδ2 extendetur in infinitum ad partes P: hoc tamen non obstante; dico adhuc mixtilineum PNLHδ2 æquale esse superficiei cylindrici recti super curva 79 CD, cuius altitudo X. Si non sunt æqualia, sit (si fieri potest) mixtilineum maius superficie, & recta N3 rectæ Hδ parallella abscindatur mixtilineum NLHδ3 æquale superficiei super curua 79CD, hoc enim absque dubio fieri potest: eodemque modo, quo ante, demonstratur mixtilineū NLHδ3 æquale esse superficiei super 9CD; sunt ergo æquales, superficies cylindrici recti cuius altitudo X, super curvis 9CD, 79CD, quod est absurdum; mixtilineum ergo PNLHδ2 non est maius dicta superficie cylindrica: sit (si fieri potest) minus; & abscindatur 9D curva, ita ut superficies cylindrici recti super 9D existens, æqualis fiat mixtilineo PNLHδ2, & ducatur 3 9 N rectæ H δ parallella: demonstratur ut ante superficiem cylindrici recti super 9D existentem, æqualem esse mixtilineo NLHδ3; sed ex suppositione eadem superficies cylindrici recti æqualis est mixtilineo PNLHδ2; mixtilinea ergo PNL Hδ2, NLHδ3, sunt inter se æqualia, quod est absurdum; & ideo mixtilineum non est minus superficie,

sed

ſed etiam demonſtratum eſt, nec eſſe maius, ſuperficies igitur cylindrici recti ſuper curva 7D cuius altitudo eſt X, æqualis eſt mixtilineo PNLHδ2, etiam quando tangens 7A rectæ 78 eſt perpendicularis, quod demonſtrandum erat.

Ex demonſtratione manifeſtum eſt mixtilineũ PNLHδ2 & ſuperficiem cylindricam ſuper curva 79CD eſſe quantitates magnitudine & gravitate analogas, quoniam eadem æqualitas quæ demonſtratur de integris, eodem modo demonſtratur de partibus earum proportionalibus; & ideo earum centra æquilibrii eodem modo dividunt rectam 2δ; ſed ipſa curva 7D eſt magnitudine & grauitate analoga cum ſuperficie cylindrica; & ideo curva eſt etiam magnitudine & gravitate analoga cum mixtilineo idem cum reliquis centrum habens æquilibrii in recta 2δ. perſpicuum quoque eſt mixtilineum PNLHδ2 eſſe ad rectangulum X. in 2δ, ut curua 79 CD ad rectam 2δ.

## *PROP. 3. THEOREMA.*

EIſdem poſitis quæ prius; ſupponatur prædicta ſuperficies cylindrici recti ſuper curva 79DC ſecari a plano per rectam 2δ tranſeunte, & in angulo ſemirecto ad planum Dδ2 inclinante. inferiorem ſuperficiei cylindricæ partem a plano ſectam apellamus trunci ſuperficiem. Dico trunci ſuperficiem æqualem eſſe mixtilineo RSTVδ2. ſupponatur extendi curva 79CD in rectam ſibi æqualem ♀ ☿ ● △, & iungatur recta △ ♑ æqualis rectæ X, ut compleatur rectangulum ♄ ♑ △ ♀, quod neceſſario æquale eſt tam ſuperficiei cylindrici quam mixtilineo PNLHδ2. Sit ♀ ☼ æqualis rectæ 27, & a puncto ☼ ducatur curva ☼ ♂ ♃ ♌ talis naturæ, ut ſumpta recta quacunque ♀ ☿ ęquali curvæ particulæ cuicunque nempe 79, perpendicularis ad rectam ♀ △ ex puncto ☿ in curvam ☼ ♌, nempe ☿ ♂, fiat æqualis perpen-

di-

diculari ex puncto 9 in rectam 2δ, nimirum 93: manifestum est mixtilineum ☼♂♃♌△♀ esse æquale superficiei trunci, quoniam inclinatio plani secantis supponitur esse angulus semirectus: nostrum ergo est demonstrare æqualitatem mixtilineorum RSTVδ2, ☼♂♃♌△♀: primo nos hanc æqualitatem demonstrabimus in postremis figuris, vbi supponimus curvam RV in progressu ab R ad V rectam 2δ semper magis appropinquare, & etiam curvam 7 D in progressu a 7 ad D ad eandem rectam magis appropinquare; & ideo curva ☼♌ in progressu a ☼ ad ♌ eo magis appropinquat rectam ♀△, quoniam eodem modo appropinquat curva ☼♌ rectam ♀△, quo 7 D rectam 2δ. Si prædicta mixtilinea non sunt æqualia, sit inter illa α differentia: & mixtilineum RVδ2 diuidatur à tot rectis rectæ R2 parallellis, nempe S3, T4, Vδ, R2, ut ab earum cum curva intersectionibus R, S, T, V, utrinque ductis ad parallelas proximas perpendicularibus Rξ, Sγ, Sλ, Tθ, Tμ, Vn, fiant duo rectilinea, nempe RξSλTμδ2 extra mixtilineum & γSθTnVδ2 intra mixtilineum, quorum differentia sit minor quam α, evidens enim est hoc fieri posse. producantur rectæ S3, T4, ut utrasque curvas PH, 7 D, intersecent in punctis N, L, 9, C, & iungantur parallellæ, rectæ 2δ, PY, NQ, NK, LM, LG, HI, a rectis mixtilineum diuidentibus terminatæ. Deinde diuidatur rectangulum ♄△ a rectis, rectæ ♑△ parallelis, ♄♀, ♓☿, ♒◉, ♑△, in rectangulũ ♄☿ æquale mixtilineo PN32, rectangulum ♓◉ æquale mixtilineo NL43, & rectangulum ♒△ æquale mixtilineo LHδ4: & ab intersectionibus rectarum rectangulum ♄△ dividentium cum curva ☼♌, nempe ☼, ♂, ♃, ♌, ducantur perpendiculares vtrinque in dividentes proximas, nempe ☼♋, ♂♐, ♂♎, ♃♍, ♃♋, ♌φ, ita ut ♐♋♍♃φ♌△♀ fiat rectilineum intra mixtilineum, & ☼♋♂♎♃♋△♀ fiat rectilineum eidem mixtilineo circumscriptum. Patet ex antecedente P2 esse ad X seu ♄♀, ut R2 ad 72 seu ☼♀, & permutando ut P2 ad R2 ita ♄♀ ad ☼♀; & ideo ut P3 ad R3 ita ♄☿ ad ☼☿; sed

rectangulum ♄☿ eſt æquale mixtilineo PN32, & ideo permutando, ut P3 ad mixtilineum ita R3 ad ☼☿, cumque P3 ſit maior mixtilineo, erit R3 maior quam ☼☿: eadem methodo demonſtratur S4 rectangulum eſſe maius quam ♂●, & T$\delta$ maius quam ♃△; eſt ergo rectilineum $R\xi S\lambda T\mu\delta 2$ maius rectilineo ☼♋♂♎♃☊△♀. Eodem modo ut N3 ad X ſeu ♓☿ ita S3 ad 93 ſeu ♂☿. & permutando, vt N3 ad S3 ita ♓☿ ad ♂☿, hoc eſt ut Q3 ad $\gamma 3$ ita ♄☿ ſeu mixtilineum PN32 ad ♆☿, & permutando ut Q3 ad mixtilineum PN32 ita $\gamma 3$ ad ♆☿, ſed Q3 eſt minus mixtilineo, & ideo $\gamma 3$ eſt minus quam ♆☿; eodem modo demonſtrátur $\theta 4$ eſſe minus quam ♍●, & $\nu\delta$ minus quam $\varphi$△: & ideo rectilineum $\gamma S\theta T\nu V\delta 2$ minus eſt rectilineo ♆♂♍♃$\varphi$☊△♀; & proinde ambo rectilinea ☼♋♂♎♃☊△♀, ♆♂♍♃$\varphi$☊△♀ conſiſtunt inter duo rectilinea $R\xi S\lambda T\mu\delta 2$, $\gamma S\theta T\nu V\delta 2$, hoc eſt maius priorum rectilineorum minus eſt maiore ſecundorum, & minus priorum maius minore ſecundorum; ſed mixtilineum ☼♂♃☊△♀ conſiſtit inter duo priora, & ideo conſiſtit etiam inter duo poſteriora nempe $R\xi S\lambda T\mu\delta 2$, $\gamma S\theta T\nu V\delta 2$, ſed mixtilineum RSTV$\delta$2 conſiſtit etiam inter hæc rectilinea, & proinde maior eſt differentia rectilineorum $R\xi S\lambda T\mu\delta 2$, $\gamma S\theta T\nu V\delta 2$, quam mixtilineorum RSTV$\delta$2, ☼♂♃☊△♀; ſed ex poſitione differentia rectilineorum eſt minor quam $\alpha$, & proinde differentia mixtilineorum eſt multo minor quam $\alpha$, quod eſt abſurdum, ponitur enim æqualis; non igitur differunt mixtilinea RSTV$\delta$2, ☼♂♃☊△♀, ſed æqualia ſunt, quod demonſtrare oportuit.

Secundo nos eandem æqualitatem demonſtrabimus in primis figuris, vbi ſupponimus curvam RV in progreſſu ab R ad V rectam 2$\delta$ ſemper magis appropinquare, & econtra curvam 7D in progreſſu a 7 ad D ab eadem recta magis elongari; & ideo curva ☼☊ in progreſſu a ☼ ad ☊ eo magis elongatur a recta ♀△, quoniam eodem modo elongatur curva ☼☊ a recta ♀△, quo curva 7D a recta 2$\delta$. Si prædi-

cta

cta mixtilinea non ſunt æqualia, ſit eorum differentia $\alpha$: deinde mixtilinea $RSTV\delta 2$, ☼♂♃♌△♀, dividantur à rectis perpendicularibus ad eorum baſes $2\delta$, ♀△, omnino ut in antecedente demonſtratione factum eſt, hac tamen lege ut differentia rectilineorum $R\xi S\lambda T\mu\delta 2$, $\gamma S\theta T\eta V\delta 2$, item & differentia rectilineorum ♃♂♍♃$\varphi$♌△♀, ☼✱♂♎♃♋△♀, ſimul, ſint minores quantitate $\alpha$; manifeſtum eſt enim hoc eſſe poſſibile, cum hæc diviſio in infinitum fieri poſſit. eadem methodo, qua in priore demonſtratione vſi ſumus, demonſtratur rectilineum $R\xi S\lambda T\mu\delta 2$ maius eſſe rectilineo ☼✱♂♎♃♋△♀, & rectilineum $\gamma S\theta T\eta V\delta 2$ minus eſſe rectilineo ♃♂♍♃$\varphi$♌△♀. Hiſce intellectis, ſi data mixtilinea non ſunt æqualia, ſit $RSTV\delta 2$ maius altero: manifeſtum eſt exceſſum rectilinei $R\xi S\lambda T\mu\delta 2$ ſupra rectilineum ☼✱♂♎♃♋△♀ æqualẽ eſſe omnibus rectãgulis $\gamma\xi$, $\theta\lambda$, $\eta\mu$, ♃✱, ♍♎, $\varphi$♋, ſimul, ſublato exceſſu rectilinei ♃♂♍♃$\varphi$♌△♀ ſupra rectilineum $\gamma S\theta T\eta V\delta 2$; ſed exceſſus mixtilinei maioris ſupra mixtilineum minus, eſt minor dicto exceſſu rectilineorum, quoniam mixtilineum maius eſt minus rectilineo maiore, & mixtilineum minus eſt maius rectilineo minore; & ideo exceſſus mixtilinei maioris ſupra mixtilineum minus, minor eſt dictis rectangulis ſimul, ſublato exceſſu rectilinei ♃♂♍♃$\varphi$♌△♀ ſupra rectilineum $\gamma S\theta T\eta V\delta 2$; ſed dicta rectangula ſimul ex hypotheſi minora ſunt quantitate $\alpha$, & ideo dicta rectangula ſimul ſublato dicto exceſsu multo minora ſunt quantitate $\alpha$; & proinde mixtilineum maius excedit minus multo minore exceſsu quam $\alpha$, quod eſt abſurdum, ponitur enim $\alpha$ exceſsus mixtilinei maioris ſupra minus; non eſt ergo mixtilineum $RSTV\delta 2$ maius mixtilineo ☼♂♃♌△♀: ſit (ſi fieri poteſt) minus; manifeſtum eſt exceſsum rectilinei ♃♂♍♃$\varphi$♌△♀ ſupra rectilineum $\gamma S\theta T\eta V\delta 2$ æqualem eſse omnibus rectangulis ♃✱, ♍♎, $\varphi$♋, $\gamma\xi$, $\theta\lambda$, $\eta\mu$, ſimul, ſublato exceſsu rectilinei $R\xi S\lambda T\mu\delta 2$ ſupra rectilineum ☼✱♂♎♃♋△♀;

 ſed

ſed exceſsus mixtilinei maioris ☼♂♃☊△♀ ſupra mixtilineum minus RSTV$\delta$2, eſt minor dicto exceſsu rectilineorum, quoniam mixtilineum maius eſt minus rectilineo maiore & mixtilineum minus eſt maius rectilineo minore; & ideo exceſsus mixtilinei maioris ſupra minus minor eſt dictis rectangulis ſimul ſublato exceſsu rectilinei R$\xi$S$\lambda$T$\mu\delta$2 ſupra rectilineum ☼✻♂♎♃☊△♀; ſed dicta rectangula ſimul, ex hypotheſi, minora ſunt quam $\alpha$; & ideo dicta rectangula ſimul ſublato dicto exceſsu multo minora ſunt quam $\alpha$; & proinde mixtilineum maius excedit minus multo minore exceſsu quam $\alpha$, quod eſt abſurdum, ponitur enim $\alpha$ exceſsus mixtilinei maioris ſupra minus; non eſt ergo mixtilineum ☼♂♃☊△♀ maius mixtilineo RSTV$\delta$2, ſed demonſtratum eſt etiam nec eſſe minus; ſunt igitur mixtilinea ☼♂♃☊△♀, RSTV$\delta$2, inter ſe æqualia, quod demonſtrandum erat.

Sunt etiam alii huius theorematis caſus, quibus omnibus poteſt applicari hæc ſecunda demonſtratio; volui tamen priorem etiam adhibere, quoniam mihi apparet ſimplicior, etiamſi non ſit generalis; lectorem tamen admoneo illam priorem poſſe adhibere in caſu maxime ordinario, nempe in figuris prioribus, reliquis manentibus dum curva RV in progreſſu ab R ad V magis a recta 2$\delta$ elongatur.

Ex demonſtratione manifeſtum eſt mixtilineum RSTV$\delta$2 & ſuperficiem trunci eſſe quantitates magnitudine & gravitate analogas, quoniam eadem æqualitas quæ demonſtratur in integris, eodẽ etiam modo demonſtratur in partibus earum proportionalibus; & ideo earum centra æquilibrii eodem modo dividunt rectam $\delta$2.

Non exiſtimo opus eſſe Lectorem admonere, quod data hac vna trunci ſuperficie, dentur omnes aliæ, quarum plana ſecantia, baſem (ſi opus eſt) productẽ in eadem recta ſecant, tales enim truncorum ſuperficies inter ſe ſunt ut earum altitudines, vel ut tangentes inclinationum planorum ſecan-

tium

rium, ut vulgo, & facillime demonstratur.

PROP. 4. THEOREMA.

SIt curva quęcunque OIGE simplex & non sinuosa, ducantur duæ rectæ vtcunque inter se parallellæ AD, Lξ, cui vtrique sit normalis recta RV. Sit mixtilineum RVYBD talis naturæ, ut, ducta recta GSB ad libitum parallella rectis AD, Lξ, recta SB contenta inter rectam RV & curvam VYBD sit semper æqualis rectæ GM tangenti curvam in puncto G protractæ ad rectam Lξ. concipiatur super curva OIGE (cuius talis est curvitas, vt quo longius a punsto O produci-tur eo minus distet a recta RV) superficies cylindrici recti secta à plano transeunte per rectam Lξ & cylindrici basem

in angulo semirecto secante. Dico mixtilineum RVYBD esse æquale superficiei trunci inferioris cylindrici a plano resectæ. Si non sint æqualia, sit eorum differentia λ, dividaturque recta RV in tot partes æquales in punctis R, S, T, V, vt ductis rectis parallelis RD nempe SC, Tδ, VZ, & completis rectangulis RC, RB, Sδ, SY, TZ, differentia rectilinei RαBXYT mixtilineo inscripti a rectilineo RDCBδYZV eidem mixtilineo circumscripto sit minor quantitate λ; manifestum

nifestum enim est hoc fieri posse, quoniam recta RV dividi potest in plures, & adhuc plures partes in infinitum. Producantur rectæ parallellæ DR, CS, δT, ZV, per curvam propositam in puncta E, G, I, O, & producantur rectæ EL, GM, I N, curvam tangentes in punctis E, G, I, O, ad rectam Lξ in punctis L, M, N, O, quæ parallellas proximas ex utraque parte intersecent etiam in punctis F, H, N, ω, θ, μ; & ad parallelas proximas sint perpendiculares EQ, GK, IP. manifestum est (ob parallelismum rectarum GK, SV) GK esse ad GH ut SV ad GM seu SB, & proinde rectangulum Sδ, nempe rectæ GK in SB, æquale est rectangulo GH in SV, sed rectangulum GH in SV maius est portione superficiei trunci insistente curvę GI, quoniam GH recta maior est curua GI & recta SV æqualis est maximę altitudini portionis superficiei cylindrici insistentis curvę GI ob planum seminormaliter basem secans per rectam Lξ; & ideo rectangulum Sδ maius etiam est portione superficiei trunci insistente curvæ GI: eodem modo probatur rectangulum RC maius esse portione superficiei trunci insistente curvæ GE & rectangulum TZ maius esse superficiei trunci insistente curvæ OI; & ideo rectilineum RDCBδYZV mixtilineo circumscriptũ maius est tota trunci superficie. Deinde ob parallelismum rectarum IP, SV, ut IP ad IN, seu GK vel ST ad θI, ita TV ad IN vel TY; & proinde rectangulum SY nempe rectę ST in TY æquale est rectangulo rectæ θI in TV, sed rectangulum θI in TV minor est portione superficiei trunci insistente curvæ IG, quoniam recta θI minor est curva GI & recta TV æqualis est minimæ altitudini eiusdem portionis superficiei trunci insistentis curvę GI, ob planum seminormaliter basem secans per rectam Lξ; & ideo rectangulum SY minus est portione superficiei trunci insistente curvæ GI; eodem modo probatur rectangulum RB minus esse portione superficiei trunci insistentis curvæ GE; & ideo rectilineum TYXBαR mixtilineo inscriptum minus est integra superficie

trun-

trunci, sed differentia inter rectilineum inscriptum & circumscriptum minor est quantitate λ ex suppositione; & ideo differentia inter superficiem trunci & figuram mixtilineam multo minor est quam λ, quoniam earum utravis demonstratur maior rectilineo inscripto & minor circumscripto, quod fieri non potest, ponitur enim λ differentia inter superficiem trunci & mixtilineum; nulla igitur est differentia inter figuram mixtilineam & superficiem trunci, & proinde sunt æquales, quod demonstrandum erat.

eisdem positis, sit mixtilineum V Y B D 2 3 ξ talis naturæ, ut, a quolibet puncto curvæ E O nempe G ducta parallella rectæ L ξ nempe G 2, intercepta recta B 2 inter duas curvas VD, D ξ, fiat æqualis tangenti curvam propositam in puncto G protractæ ad rectam A D, nempe rectæ G μ. dico mixtilineum V Y B D 2 3 ξ æquale esse superficiei trunci superioris eiusdem prioris cylindrici posita eius altitudine recta RV. rectę M G μ in puncto G sit recta normalis G 7 rectam R V secans in puncto 7. ob similitudinem triangulorum SG7, GKH, ut GS ad G7 ita GK ad GH, & ut GK ad GH ita SV ad GM vel SB, & SR ad G μ vel B2; & ideo G S est ad G7 ut RV ad S2. eodem modo demonstrari potest IT esse ad I 8 ut RV ad T3: cumque hoc fiat in omnibus punctis curvæ E O, manifestum est ex huius 2 mixtilineum R D 2 3 ξ V esse æquale superficiei cylindrici recti insistenti curvæ E O, cuius altitudo RV; atque superficies trunci inferioris æqualis est mixtilineo R V Y B D, & proinde superficies trunci superioris æqualis est mixtilineo D B Y V ξ 3 2 D, quod demonstrare oportuit.

Hinc etiam manifestum est superficiem trunci inferioris & mixtilineum R V Y B D esse quantitates magnitudine & gravitate analogas, quoniam eadem æqualitas quæ demonstratur de integris, eodem modo demonstratur de partibus earum proportionalibus. Manifestum quoque est superficiem trunci superioris & mixtilineum V Y B D 2 3 ξ esse

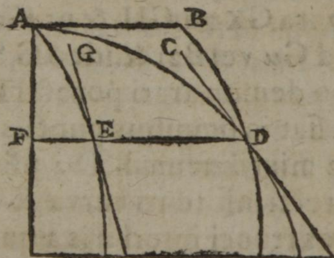
quan-

quantitates magnitudine & gravitate analogas; mixtilineum enim R V ξ 3 2 D magnitudine & gravitate analogum est toti superficiei cylindrici recti, & mixtilineum RVYBD magnitudine & gravitate analogum est superficiei trunci inferioris; & ideo (quod superest) mixtilineum D B Y V ξ 3 2 D analogum est relictæ superficiei trunci superioris, quod &c.

Huius propositionis diversi sunt casus, sed in omnibus eodem modo verificari potest præcedens conclusio.

## PROP. 5. THEOREMA.

AD rectam A F ducantur duæ curvæ AE, AD, & rectæ A F sit perpendicularis recta F D curvas secans in punctis E, D, ducanturque rectæ GE, CD, curvas tangentes. Dico rectas EG, DC, non esse parallellas: sint (si fieri potest) parallelæ, & ducatur recta AB parallela & æqualis rectæ E D: deinde per puncta B, D, ducatur curva congruens curvæ A E, si modo punctum A superponatur puncto B & punctum E puncto D: manifestum est curvam BD secare curvam BD, item & rectam C D parallelam rectæ G E tangere curvam AD; atque CD ex suppositione tangit quoque curuam B D, quod est absurdum, quoniam curvæ A D, B D, se




inui-

inuicem secant; rectæ igitur CD, GE, non sunt parallellæ quod demonstrandum erat.

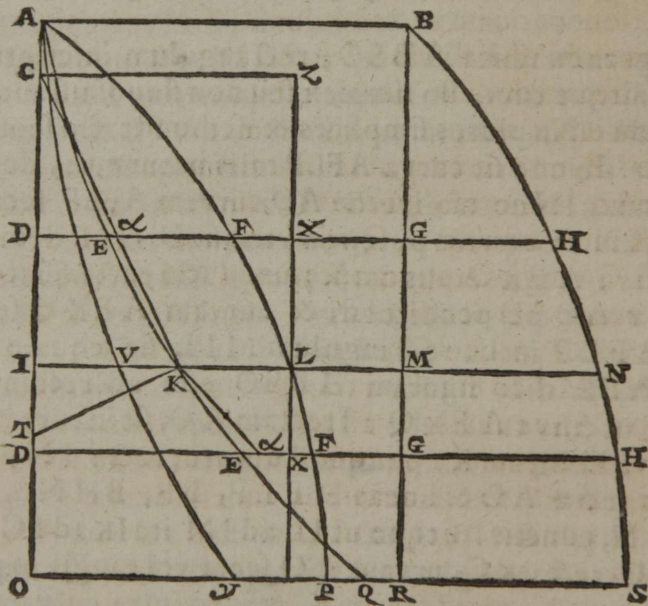
Animaduertendum est nos hic tantum loqui de illis curvis simplicibus, quæ (quo longius distant ab A) eo maiorem intercipiunt rectam ED; nam ex hac suppositione pendet demonstrationis vis.

## PROP. 6. PROBLEMA.

*Inuenire curvam, quæ ad suum axem eandem habeat rationem, quam figura qualibet exhibita ad rectangulum sibi inscriptum, & rectæ datæ seu quæsitæ curvæ axi applicatum.*

SIt figura exhibita ABSO, rectangulum inscriptum ABRO; sitque curva BS simplex seu non sinuosa, si autem sit, diuidenda est in plures simplices, & demonstratio seorsim instituenda. deinde sit curva AFLP talis naturæ, ut, ducta recta quacunq; IN normali rectæ AO, curvam AFLP secante in L, recta IN sit æqualis potentia vtrique IL, IM: deinde ducatur curva AEKQ talis naturę, ut, ducta recta quacunque IM rectæ AO perpendiculari & curvam AEKQ secante in K & AFLP in L, rectangulum MIL sit æquale mixtilineo IAFL. dico figuram ABSO esse ad rectangulum ABRO ut curva AEKQ ad rectam AO. sit in curva AFLP punctum ad libitum K, per quod ducatur recta IN perpendicularis rectæ AO & lineas AFLP, BR, BHNS, secans in L, M, N, punctis; sitque ut IL ad IM ita IK ad IC & ducatur KC: recta KC curvam AQ secat vel tangit in puncto K; si fieri potest, eam secet in K, & ideo intra curvam cadet nempe intra punctum E versus verticem A: ducatur per punctum E recta DH rectæ IN parallella lineas AQ, AP, BR, BS, secans in punctis E, F, G, H, & rectam LC in $\alpha$, item compleatur rectangulum ILZC, cuius latus LZ rectam DH secet in X. quoniam IL est ad IM ut IK ad IC, erit rectan-

gulum MIK seu mixtilineum IAFL æquale rectangulo IZ: & quoniam rectangulum GDE est æquale mixtilineo DAF, erit ut IK ad DE ita mixtilineum IAFL ad mixtilineum DAF, at IK ad DE maiorem habet rationem quam ad D$\alpha$; & ideo mixtilineum IAFL maiorem habet rationem ad mixtilineum DAF quam IK habet ad D$\alpha$ seu IC ad DC; & igitur mixtilineum IAFL maiorem habet rationem ad mixtilineum DAF quam rectangulum IZ ad rectangulum DZ, & per conversionem rationis mixtilineum IAFL ad mixtilineum IDFL habet minorem rationem quam re-




ctangulum IZ ad rectangulum IX, & permutando mixtilineũ IAFL ad rectangulum IZ minorem habet rationem quam mixtilineum IDFL ad rectangulum IX, cumq; rectangulũ IZ sit æquale mixtilineo IAFL, erit rectangulum IX minus

mix-

mixtilineo I D F L, sed & maius est, quod est absurdum; & proinde recta KC intra curvam A Q non cadit versus verticem: si fieri potest, cadat recta C K intra curvam versus basem reliquis se habentibus ut in priore positione; eritque ut I K ad D E ita mixtilineum I A F L ad mixtilineum D A L F, at I K ad D E maiorem habet rationem quam ad D $\alpha$; & ideo mixtilineum I A F L ad mixtilineum D A L F maiorem habet rationem quam IK ad D $\alpha$ seu I C ad D C; & igitur mixtilineum I A F L ad mixtilineum D A L F maiorem habet rationem quam rectangulum I Z ad rectangulum D Z, & inuertendo, per conversionem rationis & rursus invertendo, mixtilineum I A F L ad mixtilineum IDFL maiorem habet rationem quam rectangulum I Z ad rectangulum I X, & permutando mixtilineum I A F L ad rectangulum I Z maiorem habet rationem quam mixtilineum I D F L ad rectangulum I X, cumque mixtilineum I A F L sit æquale rectangulo I Z, erit rectangulum I X maius quam mixtilineum IDFL, sed & minus est, quod est absurdum; non cadit ergo recta C K intra curvam A Q versus basem; & ideo recta KC curvam A Q tangit in puncto K. rectę CK sit perpendicularis recta KT rectæ AO occurrens in T; manifestum est CI esse ad CK ut IK ad KT; atque CI est ad C K ut MI ad N I, quoniam rectæ I N, I M, I L, efficiunt triangulum rectangulum simile triangulo C I K, cuius latera IM, IN, sunt homologa lateribus C I, C K; & proinde ut IK ad K T ita I M ad IN; cumque hoc eodem modo fiat in omnibus punctis curvæ A Q, manifestum est ex huius 2 rectam A O esse ad curvam A Q ut rectangulum O B ad figuram ABSO, quod demonstrare oportuit.

## *SCHOLIVM.*

HVius propositionis inversum facile quoque demonstratur; nempe, si recta A O sit ad curvam A Q vt rectangulum O B ad figuram A B S O, item si curva A P talis

sit naturæ ut ducta I N quæcunque A O rectæ perpendicularis æquivaleat potentia utrique I L, I M; erit rectangulum M I K æquale mixtilineo I A F L: si non sit ita, ducatur curva A VY talis naturæ ut rectangulum M I V fiat æquale mixtilineo I A F L, & demonstrabitur secundum tenorem huius propositionis rectas (quæ curvas AY, AQ, tangunt in punctis V & K) esse inter se parallelas, quod est absurdnm contra propositionem præcedentem.

Huius etiam propositionis varii sunt casus, sed hoc intellecto, in reliquis nulla restat difficultas.

## PROP. 7. PROBLEMA.

*Rectam ducere datam curvam tangentem in eius puncto dato, si modo curva sit ex earum numero, quas Cartesius appellat Geometricas.*

Sit curva B H C hyperbola, cuius diameter recta A K & ordinatim applicatæ EH, KC, talis naturæ, ut solidum ex quadrato a B E in AE sit ad solidum ex quadrato a B K in A K ut cubus ab E H ad cubum a KC. Sit AB data $a$, BE $b$, & ratio solidi ex quadrato a BE in AE ad cubum ab EH ut $a^3$ ad $c^3$: oportet invenire punctum F, vt ducta recta F H hyperbolam tangat in puncto H. ex datis AB, BE, datur AE $a + b$ & EH $\sqrt{C}\left(\frac{ab^2c^3 + b^3c^3}{a}\right)$. Sit E F $z$ & D E nihil seu serum $o$; & proinde erit BD $b - o$ & A D $a + b - o$, F D $z - o$ item D G $\sqrt{C}\left(\frac{c^3ab^2 - 2c^3abo + c^3ao^2 + c^3b^3 - 3c^3b^2o + 3c^3bo^2 - c^3o^3}{a}\right)$. quoniam supponimus ordinatim applicatam D G incidere in curvam in eodem puncto G vbi recta F H eidem (si modo possibile sit) curvæ occurrit, erit ut EH ad EF ita DG ad DF; & ideo rectangulum ex D F in E H nempe $\sqrt{C}(b^2c^3az^3 -$

$3b^2c^3az^2o + 3b^2c^3azo^2 - b^2c^3ao^3 + b^3c^3z^3 - 3b^3c^3z^2o$

$a$

$+ 3b^3c_3zo_2 - b^3c^3o^3)$ æquale erit rectangulo EF in DG nempe $\sqrt{C}\,(c_3ab^2z^3 - 2c_3abz^3o + c^3az^3o^2 + c^3b^3z^3 -$

$a$

$3c^3b^2z^3o + 3c^3bz^3o^2 - c^3z^3o^3)$; & denominatores propter æqualitatem auferendo, item & utrumque ęquationis terminum cubice multiplicando & æqualia utrinque auferendo resultat æquatio hęc $3b^2c_3azo^2 - 3b^2c_3az^2o - b^2c^3ao^3 - 3b^3c^3z^2o + 3b^3c^3zo^2 - b3c_3o^3 = c^3az^3o^2 - 2c^3abz^3o - 3c^3b^2z^3o + 3c^3bz^3o^2 - c^3z^3o^3$, & omnia per $o$ dividendo $3b^2c_3azo - 3b^2c_3az^2 - b^2c_3ao^2 - 3b3c^3z^2 + 3b3c^3zo - b3c^3o^2 = c^3az^3o - 2c^3abz_3 -$

3c

$3c^3b^2z^3 + 3c^3bz^3o - c^3z^3o^2$, & quantitates reiiciendo in quibus reperitur $o$ vel eius poteſtas, reſtant $-3b^2c^3az^2 - 3b^3c^3z^2 = -2c^3abz^3 - 3c^3b^2z^3$, & ubique defectus addendo & omnia dividendo per $c^3bz^2$, æquatio eſt $3ba + 3b^2 = 2az + 3bz$, & ideo $z = \frac{3ba + 3b^2}{a2 + 3b}$ nempe recta EF, quæ inuenienda erat.

## PROP. 8. PROBLEMA.

SIt curva ADIM cuius axis AL, ſitque alia curua AFKO eius naturæ, ut, ducta recta quacunque HIK rectæ AL perpendiculari, curva AI ſit ad rectam IK ut P ad Q. oportet ducere rectam tangentem curvam AFKO in puncto K: ducatur recta BI tangens curvam ADIM in puncto I (hoc enim fieri poſſe ſupponimus) ſitque recta IB æqualis curvæ AI & ducatur recta BK, quam dico tangere curvam AFKO in puncto K: ſi eam non tangat, cadat intra, ſitque punctum G intra curvam verſus verticem, & ducatur rectæ KH parallella GFEDC. manifeſtum eſt IK eſſe ad EG ut IB ad EB, & per conuerſionem rationis IK eſt ad differentiam inter IK & EG ut IB ad IE & permutando ut IK ad IB ſeu IA curvam, hoc eſt ut Q ad P, ita differentia inter IK & EG ad EI, atque ut Q ad P ita DF ad DA curvã; & ideo ut IK ad IA curuam ita DF ad DA curvam, & permutando ut IK ad DF ita IA curua ad DA curvam, & per converſionem rationis, ut IK ad differentiam inter IK & DF ita curva IA ſeu recta IB ad curvam ID; at differentia inter IK & EG maior eſt differentia inter IK & DF, quoniam punctum G ſupponitur cadere intra curvam; & proinde IK minorem habet rationem ad exceſſum ſupra EG quam ad exceſſum
1 huius. ſupra DF; & ideo IB eſt ad IE in minore ratione quam ad DI, eſt igitur IE maior quam DI, quod eſt abſurdum, non ergo cadit recta BK intra curvam AFKO verſus verticem: cadat intra (ſi fieri poteſt) verſus baſem nempe producta in pun-

cto

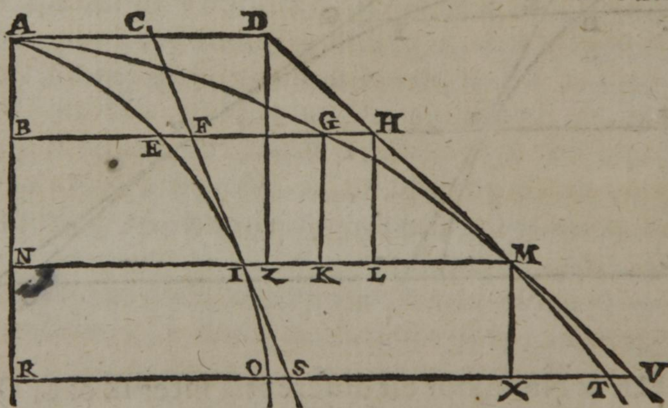
cto R. IK est ad NR ut IB ad NB, & IK est ad differentiam inter IK & NR ut IB ad IN, & permutando ut IK ad IB seu IA curuam, hoc est ut Q ad P ita differentia inter IK & NR ad IN, atque ut Q ad P ita MO ad MA curvam, & ideo ut IK ad IA curvam ita MO ad MA curvã, & permutando ut IK ad MO ita IA curva ad MA curvam, & ut IK ad differentiam inter IK & MO ita IA curva seu IB ad IM curvam; at differentia inter IK & NR minor est differentia inter IK & MO, quoniam supponimus R cadere intra curvam; & proinde IK maiorem habet rationem ad differentiam inter IK & NR quam ad differentiam inter IK & MO; & ideo IB est ad IN in maiore proportione quam ad IM; est igitur IN minor quam IM, quod est absurdum, non ergo cadit recta BK intra curvam versus basem, & proinde curvam tangit in puncto K, quod demonstrare oportuit. 1 huius.

Per hanc propositionem possunt omnium cycloidum cur-

væ comparari cum suis axibus vel basibus secundum methodum 2 huius.

## PROP. 9. PROBLEMA.

Sit curva AEIO, cuius axis AR; sitque alia curva AGMT talis naturæ, ut ducta recta quæcunque NIM rectæ AR perpendiculari, curva AI sit ad rectam NM ut P ad Q. oportet ducere rectam tangentem curvam AGMT in puncto M. ducatur recta IC tangens curvam AEIO in I (hoc enim fieri posse supponimus) & occurrens rectæ AD ipsi NM parallelæ in D. sit MZ ad rectam IC ut Q ad P, sitque ZD parallella rectæ AR & ducatur recta DM, quam dico esse tan-




gentem curvæ AGMT in puncto M: si eam non tangat, cadat intra, sitque punctum H intra curvam versus verticem & ducatur ipsi NM parallella reliquas lineas secans vt in figura. AE est ad BG ut P ad Q & AI est ad NM ut P ad Q, & ideo ut AE ad BG ita AI ad NM & permutando ut AE ad AI ita BG ad NM, & ut AE ad EI ita BG ad KM, & permutando

mutando ut A E ad B G, hoc est ut P ad Q ita E I ad K M: deinde ut C I ad Z M, hoc est ut P ad Q ita F I ad L M, quod sic probo, ratio CI ad ZM componitur ex ratione C I ad D Z & D Z ad Z M, & ratio FI ad L M componitur ex ratione F I ad HL seu C I ad D Z & HL ad LM seu D Z ad Z M, & proinde ut EI ad KM ita FI ad L M, & permutando ut EI ad FI ita KM ad L M; sed quoniam supponimus H cadere intra curvam, KM erit minor quam LM, & proinde EI minor erit quam FI, quod est absurdum; & ideo recta D M non cadet intra curvam versus verticem: cadat (si fieri possit) intra versus basem, nempe producta in puncto V. A I est ad N M ut P ad Q & AO est ad R T ut P ad Q, & ideo A I est ad N M ut A O ad RT, & permutando AI est ad A O ut NM ad R T, & ut A I ad IO ita NM ad XT, & permutando ut A I ad N M seu ut P ad Q ita IO ad XT: deinde ut CI ad ZM seu P ad Q ita IS ad X V (quod probatur sicut in priore positione) & proinde ut I O ad XT ita IS ad XV, & permutando ut IO ad IS ita XT ad XV; sed (quoniam supponimus V cadere intra curvam) erit X T maior quam XV; & proinde IO maior erit quam I S, quod est absurdum, non ergo cadit recta D M intra curvam versus basem, & proinde curvam tangit in puncto M, quod demonstrare oportuit.

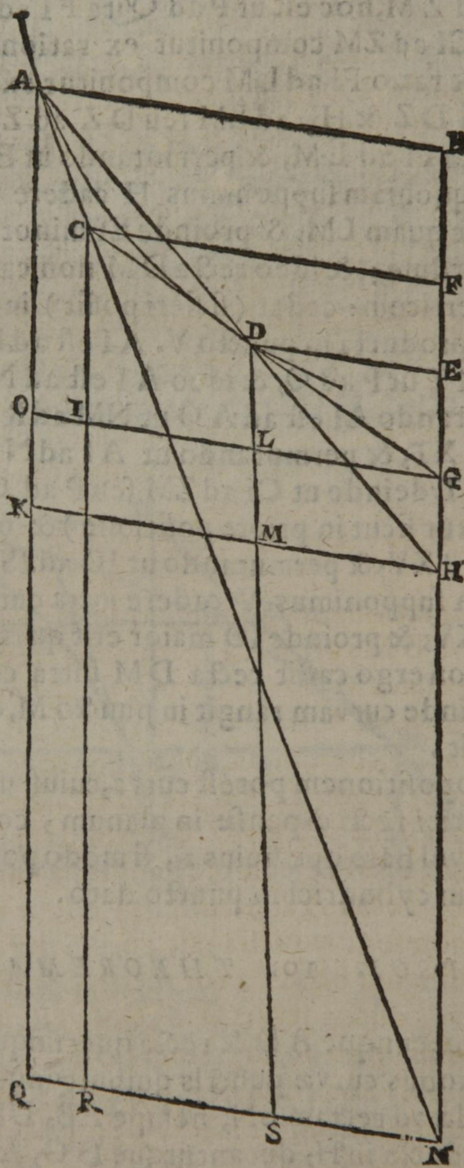
1 huius.

1 huius.

Per hanc propositionem potest curva, cuiuscunq; superficiei trunci cylindrici recti expansæ in planum, comparari cum eiusdem axe vel base ope huius 2, si modo possit duci recta tangens basem cylindrici in puncto dato.

## *PROP. 10. THEOREMA.*

SIt curva quęcunque A D & recta quęcunque BN: ducantur ex duobus curvæ punctis quibuscunque A, D, duæ rectæ parallelæ ad rectam BN, nempe AB, DE, & iungatur AD recta producta in H, ducanturque D G, A N, rectæ curvam tangentes in punctis A, D: deinde compleantur paralle-


A
B
C
F
D
E
O
I
L
G
K
M
H
Q
R
S
N

logramma ABGO, DENS, & producantur rectæ AO, NS, ut concurrant in Q. dico trapezium A D E B maius esse mixtilineo ADLO; ducatur HK parallela & æqualis rectæ A B; manifestum est trapezium ADEB esse æquale trapezio ADMK, item & trapezium A D M K maius esse trapezio A D L O, & ideo multo maius mixtilineo A D L O; patet ergo propositum nempe trapezium ADEB maius esse mixtilineo ADLO.

Producatur recta DG in C: dico rectilineum ABEDC minus esse mixtilineo A D S Q. ducatur recta C F parallela rectis AB, DE, & C R parallela rectis AQ, D S: patet trapezium A B F C esse æquale trapezio A C R Q & trapezium CFED esse æquale trapezio CDLI; & proinde rectilineum ABEDC æquale est rectilineo ACDLIRQ, quod minus est rectilineo ACDSQ; & ideo rectilineum ABEDC multo minus est mixtilineo ADSQ, quæ demonstranda erant.

*PROP. II. THEOREMA.*

Sit spatium mixtilineum quodcunque ABKI comprehensum à curva B K, recta A I & duabus rectis parallelis BA, KI; sitque curva M Y talis naturæ, vt (sumpto in curva B K quolibet puncto C & ex eo ducta recta C E parallela rectæ AB, & recta CZ curvam BK contingente terminata a recta AI, si opus est, producta in Z) recta EZ semper sit æqualis rectæ C S parallelæ rectæ A Z & terminata à curua Y M. dico mixtilineum BKMY, comprehensum à curvis BK, MY, & rectis B Y, KM, rectæ A Z parallelis, esse æquale mixtilineo B A I K. Si non sunt æqualia, sit eorum differentia X; & dividatur curvilineum BKMY à tot rectis CS, GP, KM, rectæ BY parallelis, vt (ductis rectis O M, QN, TR, Y V, parallelis rectæ AB) omnia parallellogramma O N, QR, T V, simul minora sint quam X, hoc enim fieri potest ab indefinito parallelarum numero. ducantur subtendentes rectæ BC, CG, GK, & tangentes in punctis B, C, G, K, BD, DF, FL, LK: ma-

A B E D C H F G I L K M O N Q P Z S R T X Y Y

nifestum est ex præcedente trapezium ABCE maius esse mixtilineo BCST item & trapezium CEHG maius esse mixtilineo CGPQ & trapezium GHIK maius esse mixtilineo GKMO, & ideo rectilineum ABCGKI maius est mixtilineo BKMOPQST. patet quoque ex antecedente rectilineum ABDCE minus esse mixtilineo BCVY & rectilineũ ECFGH minus esse mixtilineo CGRS & rectilineum HGKI minus mixtilineo GKNP, & proinde rectilineum ABDFLKI minus est mixtilineo BKNPRSVY: cum igitur mixtilineum BAIK consistat inter rectilinea ABCGKI, ABDFLKI & mixtilineũ BKMY consistat inter mixtilinea KMOPQSTB, KNPRSVYB, item rectilinea ABCGKI, ABDFLKI consistant inter mixtilinea BKMOPQST, BKNPRSVY, manifestum est mixtilinea ABKI, KMYB, minore quantitate differre quam mixtilinea BKMOPQST, KNPRSVYB, sed horum differentia ex suppositione est minor quam X, & ideo differentia mixtilineorum ABKI, BKMY, est multo minor quam X, quod est absurdum, ponitur enim maior quam X; nulla ergo est differentia inter mixtilinea ABKI, BKMY, & ideo æqualia sunt, quod erat demonstrandum. Eadem fere esset demonstratio in duabus præcedentibus, etiamsi convexitas curvæ BK esset versus rectam AI.

## DEFINITIONES.

### I.

SI fuerit figura ABFE comprehensa à rectis parallelis AB, EF, recta AE parallelis normali & a BF linea qualibet, item figura GHK comprehensa a rectis GH, GK, (ita ut GH sit æqualis rectæ AB & GK rectæ EF) & linea HK, quæ etiam æqualis est lineæ BF, hac lege, ut, sumptis ad libitum lineis æqualibus BD, HI, iuncta recta GI fiat æqualis rectæ DC perpendiculari ad rectam AE: appello figuram GHK, figuram ABFE involutam; & figuram ABFE, figuram GHK evolutam.

Appel-

2.

Appello quoque puncta B,H, vel D,I, vel F, K, sibi mutuo relativa.

3.

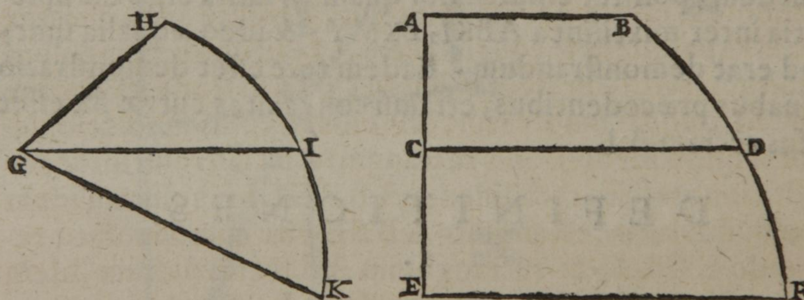
Punctum G appello centrum involutionis.

4.

Angulum H G K voco angulum involutionis.

5.

Appello rectam A E evolutæ figuræ axem, item quamlibet CD illi perpendicularem axi ordinatim applicatam.




*PROP. 12. THEOREMA.*

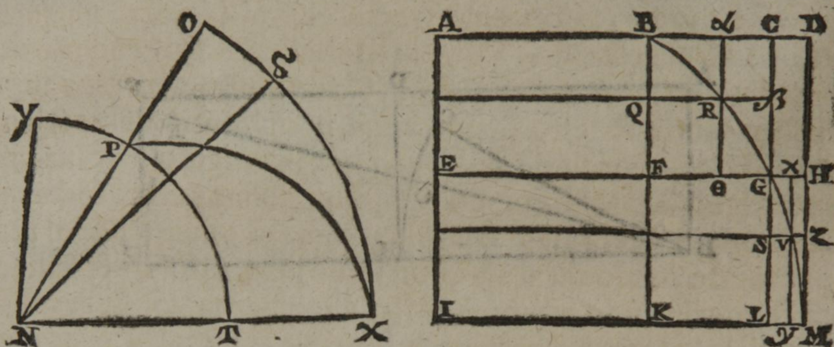
Sit rectangulum A F G B, quod involutum efficiat sectorem circuli B E G, item rectangulum ADHB, quod involutum efficiat sectorem BC H. dico angulum involutionis C B H maiorem esse angulo involutionis E B G. est enim ut B G

BG ad BH ita arcus EG ſeu arcus CH ad arcum OH, ſed BG maior eſt quam BH, & ideo CH maior eſt quam OH, & ideo angulus CBH maior eſt angulo EBG, quod erat demonſtrandum.

PROP. 13. THEOREMA.

SIt figura ABMI, quæ inuoluta efficiat figuram NPX. ſit ex centro involutionis N arcus circuli PT: dico arcum PT minorem eſſe recta AI, ſeu figuræ evolutæ axe. ducatur recta BK parallela & æqualis rectæ AI, ſitque rectangulum ad libitum EGLI, ut figuræ ABMI inſcribatur rectilineam ABFGLI, quod ſi inuolvatur, erit eius angulus inuolutionis minor angulo involutionis rectanguli ABKI involuti, hoc autem ita innoteſcit, rectilineum ABFGLI inuolutum idem eſt cum inuoluto rectangulo ABFE vna cum inuoluto rectangulo EGLI; & rectangulum ABKI involutum idem eſt cum priore involuto rectangulo ABFE vna cum inuoluto rectangulo EFKI, ſed ex præcedente angulus involutionis rectanguli EGLI minor eſt angulo involutionis rectanguli EFKI, & proinde angulus involutionis rectilinei ABFGLI inuoluti minor eſt angulo involutionis rectanguli ABKI inuoluti: eodem prorſus modo (ſi ducantur rectæ QR, SV, parallelæ rectis AB, IM, & rectæ Rθ, VY, parallelæ axi AI, ut compleatur rectilineum ABQRθGSVYI) demonſtrabitur eius angulus involutionis eſſe minor angulo inuolutionis

nis rectilinei ABFGLI, & proinde multo minor erit angulo involutionis rectanguli ABKI, nēpe γNT, supponimus enim




sectorem γNT esse rectangulum ABKI involutum: denique eodem semper modo demonstratur, quod, quo minus differt rectilineum inscriptum à figura ABMI, eo semper maior sit excessus anguli γNT supra angulum involutionis rectilinei; & ideo multo excedit angulus γNT ipsius figuræ ABMI angulum involutionis PNX, & proinde figuræ evolutæ axis AI seu arcus γT excedit arcum PT, quod demonstrandum erat.

Sit secundo ex centro involutionis N arcus circuli OX: dico arcum OX maiorem esse recta AI nempe axe figuræ PNX euolutæ. ducatur recta MD parallela & æqualis rectæ AI & producatur AB in D, sitque rectangulum ad libitum ACGE, ut figurę ABMI circumscribatur rectilineum ACGHMI, quod involvatur, erit eius angulus involutionis maior angulo involutionis rectanguli ADMI, hoc autem ita innotescit, rectilineum ACGHMI inuolutum idem est cum involuto rectangulo EHMI vna cum involuto rectangulo ACGE, & rectangulum ADMI involutum idem est cum priore involuto rectangulo EHMI vna cum involuto rectangulo

gulo

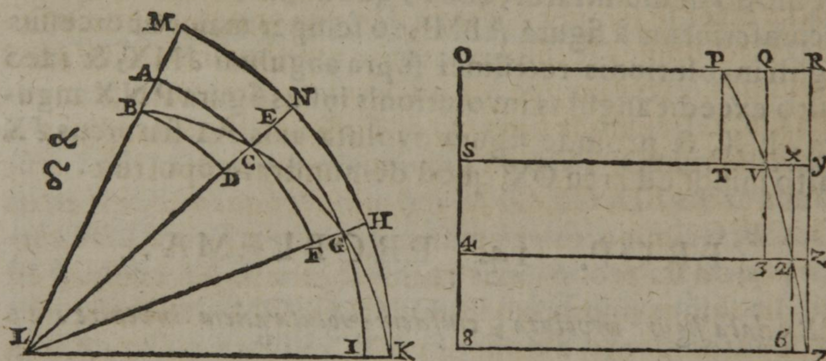
gulo A DHE, sed ex præcedente angulus involutionis rectanguli A C G E maior est angulo involutionis A D H E, & proinde angulus involutionis rectilinei ACGHMI inuoluti maior est angulo involutionis rectanguli A D M I: eodem prorsus modo (si ducantur rectæ R $\beta$, V Z, parallelę rectis A B, I M, & rectæ R $\alpha$, V X, parallellæ axi A I, ut compleatur rectilineum A $\alpha$ R $\beta$ G X V Z M I) demonstrabitur eius angulus involutionis esse maior angulo involutiouis rectilinei ACGHMI, & proinde multo maior erit angulo involutionis rectanguli ADMI nempe $\delta$NX, supponimus enim sectorem $\delta$NX esse rectangulum ADMI inuolutum: deniq; eodem semper modo demonstratur, quod, quo minus differt rectilineũ circumscriptum à figura ABMI, eo semper maior sit excessus anguli involutionis rectilinei supra angulum $\delta$N X, & ideo multo excedit angulus involutionis ipsius figura P N X angulum $\delta$ N X, & proinde figuræ evolutæ axis A I seu arcus $\delta$X multo minor est arcu OX, quod demonstrare oportuit.

## PROP. 14. PROBLEMA.

*Ex data figura involuta, eiusdem evolutæ axem invenire.*

Sit figura involuta L BK, cuius evolutæ oportet invenire axem. Centro L sit circuli arcus MK; sitque figura OP78 contenta rectis parallelis OP, 87, rectaque O8 illas normaliter secante & linea P7 talis naturæ, ut (in inuoluta sumpta qualibet recta L C producta in N, item in figura O P 78 ducta recta S V rectæ O 8 perpendiculari & eam secante in ratione MN ad NK) 87 sit ad SV ut LK ad LC. dico rectangulũ circumscriptum OR 78 esse ad figuram OP78 ut arcus MK ad axem figuræ LBK euolutæ: si non sit ita, sit vt OR 78 ad O P 78 ita MK ad $\alpha$, quæ differat ab axe figuræ LBK euolutæ quãtitate $\delta$: deinde e centro L circumscribantur figuræ inuolutæ LBK similes arcus circulares AC, EG, HK, & eidem in-

ſcribantur totidem ſimiles arcus circulares BD, CF, GI, vt differentia inter arcus inſcriptos & circumſcriptos ſit minor quam $\delta$; deinde diuidatur recta O8 in tot partes ęquales OS, S4, 48, in quot diuiditur arcus MK a rectis LC, LG, productis, ducanturque ipſi O8 perpendiculares rectæ SY, 4Z, lineam P7 ſecantes in punctis V, 2, & iungantur rectę OS parallelę PT, QV3, X26. manifeſtum eſt ex figurę OP78 deſcriptione SY eſſe ad SV vt LN ad LC ſeu vt arcus MN ad arcum AC; & ideo vt rectangulum OY ad rectangulum OV ita arcus MN ad arcum AC; eodem modo probatur, vt re-




ctangulum SZ ad rectangulum S2 ita arcus NH ſeu arcus MN ad arcum EG, & vt rectangulum 47 ad rectangulum 47 ita arcus HK ad arcum HK, cumque omnes primę inter ſe & omnes tertię inter ſe ſint ęquales, erit vt omnes primæ nempe rectangulum O7 ad omnes ſecundas nempe rectilineum OQVX2Z78 ita omnes tertiæ nempe arcus MK ad omnes quartas nempe arcus AC, EG, HK; eſt autem vt O7 ad figuram OP78 ita MK ad $\alpha$, at rectilineum OQVX2Z78 maius eſt quam figura OP78, & ideo arcus AC, EG, HK, ſimul ſunt maiores quam $\alpha$; ſed arcus AC, EG, HK, maiores

etiam

etiam sunt quam axis figuræ LKB euolutæ, quod sic probo, axis totius figuræ LBK euolutę est æqualis axibus figurarum BLC, CLG, GLK, euolutarum, sed ex antecedente axis figuræ LBC euolutæ minor est arcu AC, & axis figuræ CLG euolutæ minor arcu EG, item axis figuræ GLK euolutæ minor arcu HK, & igitur axes omnium figurarum partialium simul seu axis figuræ LBK euolutæ minor erit omnibus arcubus AC, EG, HK, simul. Deinde ex descriptione figuræ OP78, vt OR ad OP seu vt OY ad OT ita LM ad LB vel MN ad BD, eodemque modo demonstratur, vt SZ ad S3 ita NH ad CF, & 47 ad 46 ita HK ad GI, cumque primæ inter se & tertiæ inter se semper sint æquales, erit vt omnes primæ nẽpe O7 ad omnes secundas nempe rectilineum OPTV3268 ita omnes tertiæ nempe MK ad omnes quartas nempe arcus BD, CF, GI; cumque sit vt O7 ad figuram OP78 ita MK ad $\alpha$, & rectilineum OPTV3268 sit minus quam figura OP78, erũt omnes arcus BD, CF, GI, simul minores quam $\alpha$, sed arcus BD, CF, GI, minores etiam sunt quam axis figuræ LBK euolutæ, quod sic probo, axis totius figuræ LBK euolutæ est æqualis axibus figurarum BLC, CLG, GLK, euolutarum, sed ex antecedente, axis figuræ LBC euolutæ maior est arcu BD, & axis figuræ CLG euolutæ maior arcu CF & axis figuræ GLK maior arcu GI, & igitur axis omnium figurarum partialiũ simul seu axis figuræ LBK euolutæ maior est omnibus arcubus BD, CF, GI, simul; euidens igitur est quatuor esse magnitudines, nempe prima omnes arcus BD, CF, GI, simul, secunda axis figurę LBK euolutę, tertia $\alpha$, quarta omnes arcus AC, EG, HK, simul, quarum maxima & minima sunt, omnes arcus AC, EG, HK, simul, & omnes arcus BD, CF, GI, simul, harum ergo differentia maior erit quam differentia duarum reliquarum nempe axis figurę LBK euolutę & quantitatis $\alpha$, quod est absurdum, ponitur enim minor, nulla ergo est differentia inter $\alpha$ & axem figurę LBK euolutę, & ideo ęquales sunt, quod demonstrare oportuit.

## CONSECTARIVM.

HInc manifeſtum eſt ex data figura inuoluta inueniri poſſe eandem euolutam, nam ex hac datur figurę inuolutę LBK vel eius cuiuslibet partis BLC (dum euoluitur) axis, danturque ordinatim applicatę, quoniam ſunt eadem cum rectis inter centrum inuolutionis L & puncta ſua relatiua in figura euoluta LBK.

## PROP. 15 PROBLEMA.

*In antecedente figura oportet inuenire rationem inter ſectorem MLK & figuram BLK.*

SIt figura OP78 contenta rectis parallelis OP, 87, rectaque O8 illas normaliter ſecante & linea P7 talis naturę, vt (in inuoluta ſumpta qualibet recta LC producta in N, itē in figura OP78 ducta recta SV rectæ O8 perpendiculari & eam ſecante in ratione MN ad NK) 87 ſit ad SV in duplicata ratione rectæ LK ad LC: dico rectangulum circumſcriptum OR78 eſſe ad figuram OP78, vt ſector LMK ad inuolutam LBK. Si non ſit ita, ſit vt OR78 ad OP78 ita MLK ad $\alpha$, quæ differat ab inuoluta BLK quantitate $\delta$: deinde circumſcribantur figuræ inuolutæ BLK ſimiles ſectores circulares LAC, LEG, LHK, & eidem inſcribantur totidem ſimiles ſectores circulares LBD, LCF, LGI, vt differentia inter mixtilineum inſcriptum LBDCFGI & circūſcriptum LACEGHK ſit minor quam $\delta$: deinde diuidatur O8 in tot partes æquales OS, S4, 48, in quot diuiditur arcus MK a rectis LC, LG, productis, ducanturque ipſi O8 perpendiculares rectæ SY, 4Z, lineam P7 ſecantes in punctis, V, 2, & iungantur rectæ OS parallelæ PT, QV3, X26: manifeſtum eſt ex figuræ OP78 deſcriptione SY eſſe ad SV ſeu OY ad OV in duplicata ratione LN ad LC ſeu vt ſector LMN ad ſectorem LAC; eodem

mo

modo probatur SZ esse ad S2 vt LNH ad LEG, & 47 ad 47 vt LHK ad LHK, cumque omnes primæ inter se & omnes tertiæ inter se sint æquales, erit vt omnes primæ nempe rectangulum O7 ad omnes secundas nempe rectilineum OQVX2Z78 ita omnes tertiæ nempe sector MLK ad omnes quartas nempe mixtilineum LACEGHK, est autem vt O7 ad figuram OP78 ita sector MLK ad $\alpha$, at rectilineum OQVX2Z78 maius est quam figura OP 78, & ideo mixtilineum LACEGHK maius est quam $\alpha$. Deinde ex descriptione figuræ OP78, OR est ad OP vel OY ad OT in duplicata ratione LM ad LB vel vt MLN ad BLD, eodemque modo probatur, SZ ad S3 vt NLH ad CLF, & 47 ad 46 vt HLK ad GLI, cumque primæ inter se & tertiæ interse semper sint æquales, erit vt omnes primę nempe O7 ad omnes secundas nempe rectilineum OPTV 32 68 ita omnes tertiæ nempe MLK ad omnes quartas nempe mixtilineum LBDCFGI, at rectilineum OPTV 3268 minus est quam figura OP 78, & ideo mixtilineum LBDCFGIL minus est quam $\alpha$; euidens igitur est quatuor esse magnitudines, nempe prima mixtilineum LBDCFGI, secunda, inuoluta LBK, tertia $\alpha$, quarta mixtilineum LACEGHK, quarum maxima & minima sunt mixtilinea LACEGHK, LBDCFGI, harum ergo differentia maior erit quam differentia duarum reliquarum nempe $\alpha$ & inuolutæ LBK, quod est absurdum, ponitur enim minor, nulla ergo est differentia inter $\alpha$ & inuolutam BLK, sunt ergo æquales, quod demonstrare oportuit.

## PROP. 16. THEOREMA.

*Omnis figura euoluta est eiusdem inuolutæ dupla.*

Sit figura inuoluta LBK, quæ euoluta efficiat figuram OP 78: dico figuram OP 78 duplam esse figuræ LBK: si ita non sit, fiat euoluta OP78 dupla quantitatis $\alpha$, quæ differat ab inuoluta LBK quantitate $\delta$; inscribatur inuolutæ

LBK

L BK mixtilineum LBDCFGI & eidem circumſcribatur mixtilineum LACEGHK vt eorum differentia ſit minor quam $\delta$;
13 huius. ſintque punctis B, C, G, K, evolutæ puncta relatiua P, V, 2, 7, & compleantur rectangula OV, OT, S2, S3, 47, 46. recta LC eſt æqualis rectæ SV & curua AC eſt maior recta QV, & ideo ſector circularis LAC maior eſt dimidio rectanguli OV, eodem modo probatur ſectoré circularem LGE maioré eſſe dimidio rectanguli S2 & ſectorem circularem LHK maiorem eſſe dimidio rectanguli 47, & ideo mixtilineum LACE
13 huius. GHK maius eſſe dimidio OQVX2Z78, & proinde multo maius quam dimidium evolutæ OP78 nempe $\alpha$. deinde recta OP eſt æqualis rectæ LB & curva BD minor recta PT, & ideo ſector circularis LBD minor eſt dimidio rectanguli OT, eodemque modo demonſtratur ſectorem LCF minorem eſſe dimidio rectanguli S3 & ſectorem LGI minorem eſſe dimidio rectanguli 46, & ideo mixtilineum LBDCFGI minus eſt dimidio rectilinei OPTV3268, & proinde multo minus quam dimidium evolutæ nempe $\alpha$: evidens igitur eſt quatuor eſſe quantitates, nempe prima mixtilineum LBDCFGI, ſecunda, involuta LBK, tertia $\alpha$, quarta mixtilineum LACE GHK, quarum maxima & minima ſunt mixtilinea LACEG HK, LBDCFGI, harum ergo differentia maior erit quam differentia duarum reliquarum nempe $\alpha$ & involutæ LBK, quod eſt abſurdum, ponitur enim minor, nulla ergo eſt differentia inter $\alpha$ & involutam LBK, ſunt ergo æquales, quod demonſtrare oportuit.

### *PROP.* 17. *THEOREMA.*

Sit figura involuta ABG; producatur recta AG & in eam ſit perpendicularis recta BK, quæ tota cadat extra curvam BG: dico rectam BK non eſſe minorem quam axis figuræ ABG evolutæ: ſit ſi fieri poteſt minor prædicto axe, ſitque axis figuræ ABC evolutæ minor quam exceſſus axis

figuræ

figuræ ABG euolutæ ſupra rectam BK; ducantur ex centro A arcus circulares CI, HO; manifeſtum eſt arcum CI maiorem eſſe axe figuræ CAH evolutæ & HO maiorem eſſe axe figuræ HAG evolutæ, atque recta DI maior eſt arcu CI & recta IK maior eſt arcu HO, & ideo recta DK multo maior eſt quam axis figuræ CAH evolutæ vna cum axe figuræ HAG euolutæ, hoc eſt, recta DK maior eſt axe figuræ CAG euolutæ, ſed axis figuræ BAG euolutæ ſuperat rectam BK maiore exceſſu quam axe figuræ BAC euolutæ, & proinde axis figuræ BAG euolutæ minùs axis figurę BAC euolutę, hoc eſt, axis figurę CAG euolutę, maior eſt recta BK, ſed & minor eſt rectę DK, quod eſt abſurdum, recta ergo BK non eſt minor axe figurę BAG euolutę, quod demonſtrandum erat.

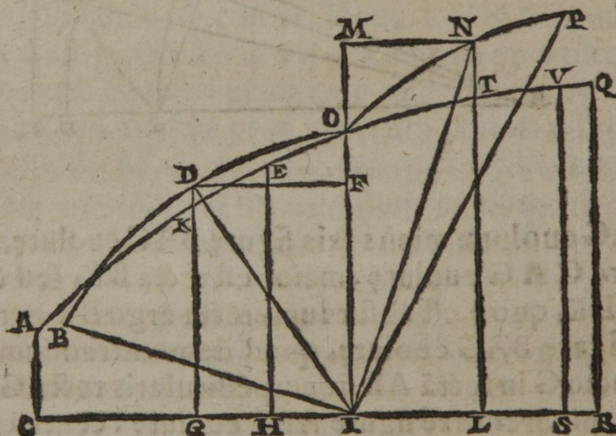


Ex puncto G in rectā AB ſit perpēdicularis recta GF, quam dico eſſe minorem axe figurę ABG euolutę. centro A ſit arcus circularis GE, qui maior eſt recta GF & minor axe figurę ABG euolutę, & ideo recta GF multo minor eſt axe figurę ABG euolutę, quod demonſtrare oportuit.

PROP.

## PROP. 18. THEOREMA.

SIt figura euoluta ACRQ, in qua ſit ordinatim applicata ad libitum OI. deinde manente rectâ OI inuoluatur figura ACRQ in figuram inuolutam IBOP: dico lineam BOP cadere inter lineam AOQ & eius axem CR, item lineas AOQ, BOP, ſe inuicem tangere in puncto O. ſi fieri poteſt, cadat linea OP extra lineam OQ in puncto N: ſuppono curuam OQ (quo propius ad Q) eo longius diſtare ab axe IR, & igitur NM perpendicularis recta in rectam IO productam cadit extra curuam ON, & proinde recta NM (ex antecedente) non eſt minor quam axis figurę ION euolutę. Sit in euoluta ordinatim applicata VS ęqualis rectę IN; manifeſtū




eſt figuram OVSI eſſe ION euolutam, atque IN ſeu SV eſt maior quam LT, & ideo SI eſt maior quam IL, nempe axis figurę ION euolutę maior quam MN, quod eſt abſurdum, & proinde OP non cadit extra OQ: eodem modo probatur OP non coincidere cum OQ, cadit ergo intra, quod demonſtrare oportuit.

Secundo, si fieri potest, cadat linea O B extra lineam O A in puncto D; suppono curuam O A (quo propius ad A) eo minus distare ab axe C I; cadat D F perpendicularis in rectam O I non productam intra curuam D O, & ideo D F est minor axe figurę I D O euolutę: sit in euoluta ordinatim applicata E H ęqualis rectę D I; manifestum est figuram O E H I esse I O D euolutam, atque I D seu H E maior est quam recta K G, & ideo G I est maior quam H I, nempe D F maior quam axis figurę I D O euolutę, quod est absurdum ex huius antecedente, & proinde B O non cadit extra A O: eodem modo probatur O B non coincidere cum O A, cadit ergo intra, quod demonstrare oportuit.

Quod si perpendicularis D F cadat in I O productam, non potest I O B esse figura I O A C inuoluta, quoniam I D maior erit quam vlla ordinatim applicata in figura I O A C.

## CONSECTARIUM.

QVoniam figurę C A O Q R, I B O P, se mutuo tangunt in puncto O, manifestum est rectam, vnam ex his figuris tangentem in puncto O, alteram etiam in eodem puncto tangere; atque hinc euidens est methodus ducendi rectam, quę inuolutam in dato puncto tangat, si modo detur methodus ducendi rectam, quę euolutam in dato puncto contingat, & e contra; recta enim tangens euolutam eodem inclinat angulo ad ordinatim applicatam, quo tangens inuolutam inclinat ad eandem ordinatim applicatam in centrum inuolutionis cum reliquis concurrentem.

Omnia prędicta de figurarum inuolutione eodem modo demonstrantur, quando euolutę curua est conuexa versus axem, etiamsi in nostris figuris euolutę curua sit versus axē concaua.

*PROP. 19. THEOREMA.*

SIt figura quęcunque AB ſuper qua imaginetur cylindricus rectus ſectus a plano tranſeunte per rectam FG & planum baſeos AB ſeminormaliter ſecante. ſit recta ML rectę FG parallela, ſitque ſuper recta ML mixtilineum MOLN talis naturę, vt ( ducta recta quacunque EDCNO rectæ FG normali & figuras AB, LOMN, ſecante in punctis D,C,N,O) recta aſſignata P ſit ad mediam arithmeticam inter DE, CE, vt DC ad NO. Dico cylindricum rectum cuius baſis MOLN & altitudo recta P eſſe æqualem inferiori trunco cylindrici ſuper AB ſecti vt ſupra dictum eſt. Quoniam enim P eſt ad mediam arithmeticam inter DE, CE, vt DC ad NO, igitur rectangulum P in NO æquale eſt trapezio a rectis DC, CE, DE, rectangulo ad D & C, ſed tale trapezium eſt communis ſectio plani ſuper recta EO ad baſem AB recti cum trunco inferiore cylindrici; cumque hoc ſemper fiat vbicunque ducatur recta EDCNO, manifeſtum eſt ex doctrina ductuum Gregorii à S. Vincentio cylindricum rectum cuius baſis MOLN & altitudo P æqualem eſſe trunco inferiori cylindrici recti ſuper MOLN ſecti vt ſupra dictum eſt, quod demonſtrare oportuit.

Hinc quoque patet cylindricum cuius baſis MOLN & altitudo P eſſe magnitudine & grauitate analogum dicto trũco; cumque cylindricus ſit ſuæ baſi analogus, patet etiam truncum eſſe eidem baſi magnitudine & grauitate analogũ.

*PROP. 20. THEOREMA.*

EIſdem poſitis quæ in antecedente, ſit recta FZ rectæ FG normalis, ſuper qua ſit mixtilineum QTVR talis naturæ, vt ( ducta recta quacunque RTDS rectæ FR normali & figuras QTVR, AB, interſecante in punctis T, D, S) recta aſſignata P ſit ad DS, vt recta RF ad rectam RT. dico cylindri-

cum rectum cuius baſis QTVR & altitudo P eſſe æqualem inferiori trunco cylindrici ſuper AB ſecti vt ſupra dictum eſt, nempe per planum in recta FG tranſiens & baſem A B ſeminormaliter ſecans. Quoniam P eſt ad DS vt RF ad RT, erit rectangulum P in R T ęquale rectangulo R F in D S, ſed rectangulum R F in D S eſt communis interſectio trunci inferioris cylindrici cum plano ſuper recta R S plano baſeos AB normali, & ideo rectangulum P in R T eidem communi ſectioni eſt æquale, cumque hoc ſemper fiat vbicunque ducatur recta R S, manifeſtum eſt ex doctrina ductuum Gregorii

a S. Vincentio cylindricum rectum cuius basis QTVR & altido P æqualem esse trunco inferiori cylindrici recti super AB secti vt dictum est supra, quod demonstrare oportuit.

Hinc etiam euidens est cylindricum cuius basis QT VR & altitudo P esse magnitudine & grauitate analogum dicto trunco cylindrici recti, & proinde basis quoque cylindrici recti QTVR eidem trunco est analoga magnitudine & grauitate.

Supposito omnium figurarum quadraturas & centra grauitatis data esse, facile erit omnium truncorum cylindrici cuiuslibet recti cubaturas & centra grauitatis ex hac propositione & præcedente inuenire, vel e contra: eodem modo ex huius secunda tertia & quarta datis omnium figurarũ quadraturis & grauitatis centris non difficile est inuenire superficiei cuiuscunque trunci cylindrici recti quadraturam & grauitatis centrum vel e contra, quod hic admonuisse sufficiat.

## PROP. 21. PROBLEMA.

SIt solidum rotundum quodlibet sectum per diametrum AD plano normali ad basem circularem BOCN a diametro BC, & intersectione cum plano efficiens figuram ABC: secetur solidum rotundum ABC ab alio plano quomodocunque FNGO ad planum AB normali, ita vt communis solidi & plani intersectio fiat figura FNGO, cuius intersectio cum plano ABC est recta FG: ducatur FK rectæ BC parallella & rectæ AD occurrens in I. concipiatur solidum rotundum, diametrum habens FG, ex circulis conflatum, quorum radii sunt omnes perpendiculares ex recta FG in curuam FO, ita vt diameter figuræ FG per centra infinitorum illorum circulorum transiens, ad illos omnes inclinet in angulo æquali ipsi FGB. ex datis, solido ABC & punctis F, G, oportet etiam exhibere mensuram solidi illius rotundi, quod

quod ſit F O G N. AD rectam FG ſecet in E, & rectæ B C parallella ducatur per E recta X E Z. ex datis punctis F, G, datur punctum E, quoniam ſupponitur dari A B C figura: infra X Z ducatur quodlibet planum baſi B O C N parallellum & cum planis ABC, FOGN, communes interſectiones faciens rectas PQ, RS: manifeſtum R S eſſe radium circuli in ſolido F OGN per R tranſeuntis; & ob rotunditatem ſolidi A B C, & ſectionem normalem plani ABC ad baſem, punctum S eſt in ſemicirculo, cuius diameter P Q; & igitur quadratum rectæ

RS æquale eſt rectangulo P R Q, & circulus ex radio R S æqualis armillæ circulari P R Q; cumque hoc ſemper fiat inter E & G; erit portio ſolidi rotundi FO GN infra E æqualis omnibus armillis circularibus inter circulum X E Z & armillam BGC, hoc eſt, ſolido excauato æquali portioni ſolidi rotundi XZCB poſt ablatum conum cuius vertex E & ſemidiameter baſeos DG: eodem modo probatur portionem ſolidi rotundi FOGN inter E & F æqualem eſſe ſolido excauato F KZX poſt ablatum conum, cuius vertex E & baſeos ſemidiameter I F: & igitur ſi a portione ſolidi rotundi data F K C B, au-

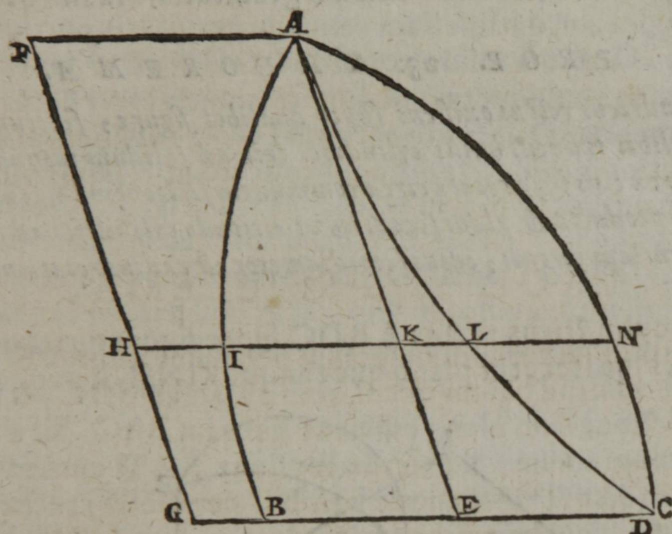
auferatur quadruplum conorum ad verticem datorum FEI, DEG; relinquetur solidum quæsitum rotundum FOGN. Si vero daretur centrum grauitatis solidi rotundi ABC & centrum ablati AFK; daretur etiam centrum grauitatis portionis FKCB, quo dato vna cum centro grauitatis conorum abstrahendorum, datur etiam centrum grauitatis portionis excauatæ, quæ cum solido rotundo FOGN est proportionaliter analoga, vt liquet ex demonstratione; ergo datur etiam centrum grauitatis solidi rotundi FOG. Sunt etiam alii huius propositionis casus, sed hoc intellecto in reliquis nulla restat difficultas.

## PROP. 22. PROBLEMA.

Sit solidum rotundum sectum per diametrum AE, plano normali ad basem circularem a diametro BC, & intersectione cum plano efficiens figuram BAC. Sit FAEG parallellogramum, & describatur linea ALD eius naturæ, vt ducta recta HL vtcunque basi BC parallella, rectæ HK, IK, KL, sint continue proportionales. ex data solidi rotundi ABC ad cylindrum datum ratione, oportet figuræ ALDEK quadraturam inuenire. ducatur recta vtcunque HIKLN: quadratum a latere IK, hoc est rectangulum HKL est quarta pars quadrati ex IN; & ideo rectangulum HKL est ad circulum ex diametro IN in ratione composita ex ratione subquadrupla & ex ratione quadrati diametri ad circulum; sed punctum K sumptum est arbitrariè; & proinde cylindricus rectus ex base ALDEK in altitudinem HK est ad solidum rotundum ABC in ratione composita ex ratione subquadrupla & ex ratione quadrati diametri ad circulum; & ideo quadruplum cylindrici prædicti est ad solidum rotundum ABC, vt quadratum diametri ad circulum, hoc est, vt parallellipipedum rectangulum ad cylindrum eiusdem altitudinis sibi inscriptũ, & permutando, quadruplum cylindrici est ad parallellipipedum

pedum

pedum vt ſolidum rotundum ad cylindrum; & proinde datur ratio quadrupli cylindrici ad parallellipipedum, & ideo datur cylindrici cubatura, & baſeos ALDEK quadratura.




Ex demonſtratione etiam manifeſtum eſt ſolidum rotundum ABC eſſe figuræ A L D E K analogum tam in magnitudine quam in grauitate, quoniam eadem quæ demonſtrantur de totis, eodem modo demonſtrari poſſunt de partibus eorum proportionalibus; & igitur centrum grauitatis ſolidi rotundi eſt centrum æquilibrii figuræ.

Hinc etiam manifeſtum eſt cylindricum cuius baſis AKED L & altitudo HK duplum eſſe trunci cylindrici recti cuius baſis AIBE ſecti a plano in angulo ſemirecto inclinante, & per rectam AE baſeos planum ſecante; hoc autem trunco dato, datur quilibet alius truncus per eandem rectam A E abſciſſus, quoniam tales trunci inter ſe ſunt vt altitudines, vel vt cli-

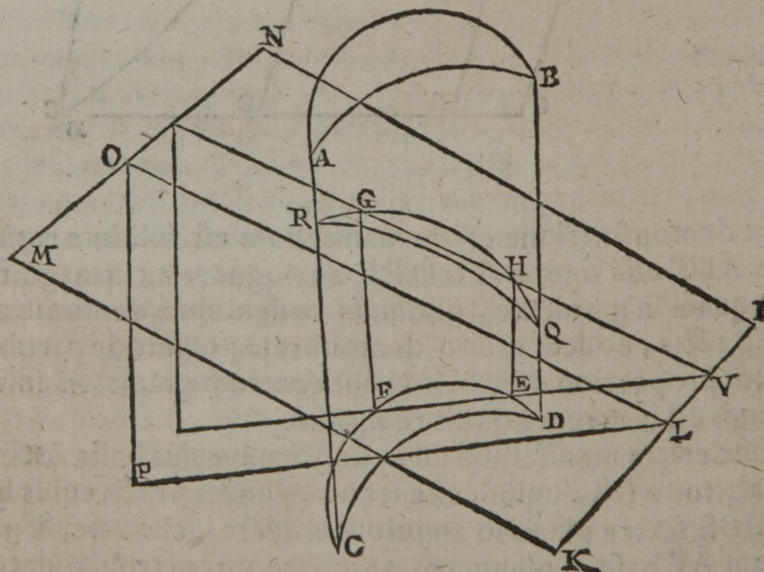
inclinationum tangentes, quod facile est demonstratu.

Nullo quoque negotio demonstratur huius problematis conuersum, nempe ex datis figuræ alicuius quadratura & grauitatis centro; solidi alicuius rotundi ad cylindrum datū proportionem, & eius centrum grauitatis, inuenire.

## PROP. 23. THEOREMA.

*Si cylindricus rectus existens super qualibet figura, secetur plano; quilibet truncus huius cylindrici erit ad solidum rotundum ortum ex eius base rotata circa communem sectionem baseos (si opus est) productæ & plani secantis, vt altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli, cuius semidiameter est radius rotationis.*

SIt cylindricus rectus ABDC super figura quacunque DCF, qui secetur plano quocunque KINM, ita vt commu-




nis intersectio plani cum cylindrico fiat figura RGHQ. producatur planum secans donec baseos DCF planum secet in

recta

recta K I, & planum A B in recta M N: & a puncto quolibet rectę I K nempe L, ducatur eidem I K perpendiculare planũ OLP, secans plana IKMN, DFC, normaliter in rectis O L, L P; sitque perpendicularis in LP recta OP. Supponimus hic K I esse axem rotationis; & rectam P L illi normalem, appellamus radium rotationis. dico truncum cylindrici RQDC esse ad solidum rotundum ortum ex rotatione figurę DE FC circa IK axem rotationis, vt OP altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli, cuius semidiameter est radius rotationis L P. per basem DE FC ducatur vbilibet recta E F, a baseos circumferentia vtrinque terminata in E & F, quæ producta, axi rotationis normaliter incidat in puncto V: a punctis E, F, excitentur perpendiculares baseos plano E H, F G, a plano secante terminatæ in H & G, quæ necessario sunt in superficie trunci ob cylindricum rectum, ducaturque V H recta, quæ necessario existit in I K M N plano secante: manifestum est triangula OLP, HEV, rectangula ad P & E (cum habeãt angulos OLP, HEV, æquales inclinationi plani secantis I K M N) esse similia; & ducta recta G V, ob eandem rationem similia sunt triangula HEV, GFV, cumque G F sit parallella rectæ HE, & EF in directum EV; coincident rectæ GV, HV, in vnam rectam plani IKMN, eritque GH E F communis interfectio plani GFV, plano O P L parallelli, cum trunco cylindrici RQDC: patet ergo O P ad PL esse, vt H E ad E V; & ideo vt OP ad circumferentiam circuli cuius semidiameter P L, ita H E ad circumferentiam circuli cuius semidiameter E V; & vt O P ad circumferentiam circuli cuius semidiameter P L, ita (reliquos terminos in eandem altitudinem, nempe semissem rectæ EV, ducendo) triangulum H E V ad circulum cuius semidiameter E V: eodem modo demonstratur esse, vt OP ad circumferentiam circuli, cuius semidiameter PL, ita triangulum GFV ad circulum, cuius semidiameter F V: est igitur totum triangulum G F V ad totum circulum cuius semidiameter F V, ita ablatum triangulum H E V ad

ablatum circulum cuius ſemidiameter E V; & proinde in eadem ratione erit relictum trapezium GF EH ad relictam armillam circularem genitam ex reuolutione rectæ F E circa axem rotationis I K, nempe in ratione O P ad circumferentiam circuli, cuius ſemidiameter L P: atque hæc proportio eodem modo demonſtratur de omnibus rectis ductis in baſe D E F C, quæ (ſi opus eſt) productæ, in axem rotationis I K normaliter incidunt; atque ex omnibus iſtis rectis conflatur ipſa baſis DC; ex omnibus trapeziis ſuper iſtis rectis deſcriptis conflatur truncus RQDC, & ex omnibus armillis ab iſtarum rectarum reuolutione genitis, conflatur ſolidum rotundum genitum a reuolutione baſeos circa axem rotationis I K; & proinde vt vna antecedentium ad vnam conſequẽtium, nimirum OP altitudo cylindri ad circumferentiam circuli cuius ſemidiameter P L radius nempe rotationis, ita omnes antecedentes, nimirum omnia trapezia, hoc eſt, trũcus RQDC, ad omnes conſequentes, nempe omnes armillas circulares, hoc eſt, ſolidum rotundum ortum ex rotatione figuræ DC circa axem IK, quod demonſtrare oportuit.

Hoc theorema eodem modo demonſtratur de trunco ſuperiore, ſi figura AB concipiatur rotari circa rectam M N.

Patet ex demonſtratione truncum RQDC & ſolidum rotundum ortum ex reuolutione baſeos D C circa axem rotationis I K, eſſe quantitates magnitudine & grauitate analogas, quoniam eadem proportio quæ demonſtratur inter integras, eodem modo demonſtratur de earum partibus proportionalibus.

In ſequentibus notandum (quando loquimur de ſuperficie cylindrici vel trunci) nos intelligere ſolam ſuperficiem ſine baſibus; hoc eſt nunquam conſideramus figuras quæ ſunt cylindrici baſes, nec communem ſectionem plani cylindricum ſecantis.

PROP.

## PROP. 24. THEOREMA.

*Eisdem positis, quæ in antecedente; superficies trunci erit ad superficiem solidi rotundi orti ex eius base rotata circa communem sectionem baseos (si opus est) producta & plani secantis, vt altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli cuius semidiameter est radius rotationis.*

FIgura & præparatio sint eædem sicut in antecedente, dico superficiem trunci R QDC esse ad superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ DE FC circa I K axem rotationis, vt O P altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli cuius semidiameter est radius rotationis L P. in antecedente demonstratum est O P esse ad circumferentiam circuli cujus semidiameter PL, vt HE ad circumferentiam circuli cujus semidiameter E V: atque hæc proportio eodem modo demonstratur de omnibus rectis in superficie trunci R QD C ad basem BE FC perpendicularibus, ad omnes circumferentias circulorum ab earum punctis infimis in circumrotatione descriptas; atque ex omnibus illis rectis conflatur ipsa superficies trunci, & ex omnibus circumferentiis circulorum ab infimis rectarum punctis seu a baseos ambitu descriptis, conflatur superficies solidi rotundi orti ex rotatione baseos circa axem I K; & ideo vt vna antecedentium ad vnam consequentium, nempe O P altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli cuius semediameter est LP radius rotationis, ita omnes antecedentes, hoc est, superficies trunci RQ DC, ad omnes consequentes, hoc est, superficiem solidi rotundi orti ex rotatione baseos DEFC circa axem rotationis IK, quod erat demonstrandum. Hoc etiam theorema demonstratur eodem modo de trunco superiore si figura A B concipiatur rotari circa rectam MN.

Patet ex demonstratione superficiem trunci R Q D C & superficiem solidi rotundi orti ex rotatione baseos D E F C

circa axem rotationis IK, esse quantitates magnitudine & grauitate analogas, quoniam eadem proportio quæ demõstratur esse inter totas, eodem modo demonstratur esse inter partes earum proportionales.

PROP. 25. THEOREMA.

*Eisdem positis, supponendo angulum inclinationis, Plani secantis cum base cylindrici (si opus est) producta, esse semirectum; Dico quadratum semidiametri circuli æqualis superficiei solidi rotundi duplum esse superficiei trunci.*

Est enim ex præcedente, vt altitudo cylindrici ad circũferentiam circuli cuius semidiameter est radius rotationis, ita superficies trunci ad superficiem solidi rotundi: in hoc autem casu, quando angulus inclinationis est semirectus, altitudo cylindrici est æqualis radio rotationis; & ideo in nostro casu, vt semidiameter ad sui circumferentiam, ita superficies trunci ad superficiem solidi rotundi; vt autem semidiameter ad circumferentiam ita semissis quadrati semidiametri ad circulum; & ideo vt semissis quadrati semidiametri ad circulum, ita superficies trunci ad superficiem solidi rotundi; & conuertendo & permutando, circulus est ad superficiem solidi rotundi vt semissis quadrati semidiametri ad superficiem trunci; sed circulus supponitur æqualis superficiei solidi rotundi; & igitur semissis quadrati semidiametri illius circuli æqualis est superficiei trunci; & ideo quadratum semidiametri est duplum superficiei trũci, quod demonstrandum erat.

Duæ præcedentes propositiones eodem prorsus modo demonstrantur de superficiebus rotundis genitis ex rotatione vnius vel plurium linearum quarumcunque siue rectarum, curuarum vel mixtarum, figuram non claudentium; semper enim ad superficies cylindrici recti super linea vel lineis

neis a plano resectas, superficies rotundæ ex lineę vel linearum rotatione genitæ prædictas habent rationes.

PROP. 26. THEOREMA.

*Eisdem positis quæ in antecedente; Dico cubum semidiametri sphæræ æqualis solido rotundo esse ad truncum vt tria ad duo.*

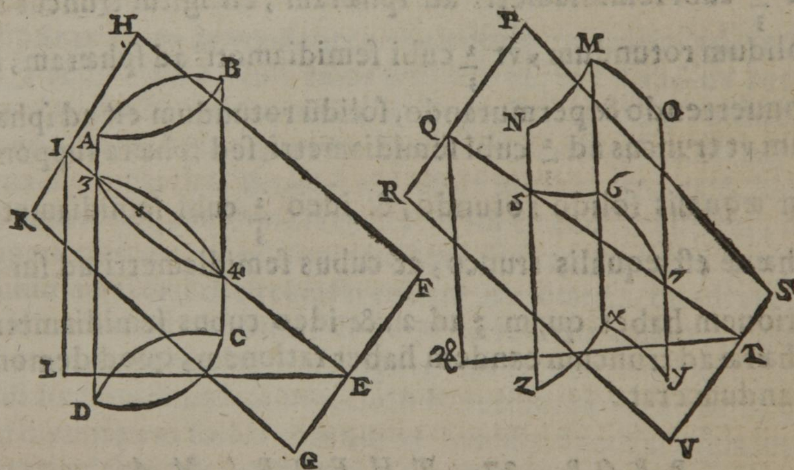
Est enim (in hoc casu) truncus ad solidum rotundum vt semidiameter ad sui circumferentiam, hoc est, vt duplum quadrati semidiametri ad quadruplum circuli, hoc est, vt $\frac{2}{3}$ cubi semidiametri ad sphæram; est igitur truncus ad solidum rotundum, vt $\frac{2}{3}$ cubi semidiametri ad sphæram; & conuertendo & permutando, solidũ rotundum est ad sphæram vt truncus ad $\frac{2}{3}$ cubi semidiametri; sed sphæra supponitur æqualis solido rotundo; & ideo $\frac{2}{3}$ cubi semidiametri sphæræ est æqualis trunco, at cubus semidiametri ad sui $\frac{2}{3}$ rationem habet quam 3 ad 2; & ideo cubus semidiametri sphæræ ad truncum eandem habet rationem, quod demonstrandum erat.

PROP. 27. THEOREMA.

*Si duo cylindrici recti quicunque æquialti, secentur a planis quibuscunque, vnusquisque in duos truncos; proportio, solidi rotundi orti ex rotatione baseos cylindrici circa communem baseos (si opus est) productæ cum Plano secante intersectionem, ad solidum rotundum ortum ex simili alterius cylindrici baseos rotatione, est composita ex directa proportione radiorum rotationis & directa proportione truncorum cylindrici inferiorum.*

Sit

Sint duo cylindrici recti æquialti ABCD, NMOYXZ, basibus D C, X Y Z, insistentes, a planis intersecti, vnusquisque in duos truncos; nempe cylindricus A B C D sit intersectus a plano KHFG in truncos AB 43, 43 DC, & cylindricus NMOYXZ a plano PSVR in truncos NMO765, 765 ZXY. Sint plani HFGK cum basium planis cylindrici parallelarum (si opus est) productis, D C, O B, intersectiones, rectæ KH, GF; sintque plani PSVR cum planis basium cylindrici parallelarum NMO, ZXY, (si opus est) productis, in-




tersectiones, rectæ R P, V S. Sintque plana rectis F G, S V, normalia, quæ plana secantia intersecant in rectis IE, QT, & plana basium DC, ZXY, (si opus est) producta in rectis LE, &T; sintque anguli ILE, Q&T, recti. Manifestum est ex hujus 23, positis HFGK, PS VR, planis secantibus & GF, VS, rotationis axibus, LE, &T, esse rotationis radios. Dico igitur solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ D C circa GF, esse ad solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ Z

XY

XY circa VS, in ratione composita ex proportione trunci 34 CD ad truncum 567 YXZ & ex proportione radii rotationis LE ad radium rotationis &T. Ratio solidi rotundi orti ex figura DC ad solidum ortum ex figura ZXY, est composita, ex ratione solidi rotundi ex DC orti ad truncum 34 CD, ex ratione trunci 34 CD ad truncum 567 YXZ, & ex ratione trunci 567 YXZ ad solidum rotundum ex ZXY ortum; sed ratio solidi rotundi ex DC orti ad truncum 34 CD est æqualis rationi circumferentię circuli ex semidiametro LE descripti ad IL altitudinem cylindrici: & ratio trunci 567 YXZ ad solidum rotundum ex YXZ ortum est æqualis rationi Q& seù IL altitudinis cylindrici ad circumferentiam circuli ex semidiametro T& descripti; & proinde ratio solidi rotundi orti ex DC ad solidum rotundum ortum ex ZXY est composita, ex ratione trunci 34 CD ad truncum 567 YXZ, ex ratione circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad rectam IL, & ex ratione rectæ IL ad circumferentiam circuli ex semidiametro T& descripti; sed hæ duæ postremæ rationes componunt rationem circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad circumferentiam circuli ex semidiametro T& descripti, quæ eadem est cum ratione semidiametri LE ad semidiametrum T&: & proinde solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ DC circa axem FG est ad solidum rotundum ex rotatione figuræ XYZ circa axem VS in ratione composita ex proportione trunci inferioris 34 CD ad truncum inferiorem 567 YXZ, & ex proportione radii rotationis EL ad radium rotationis T&, quod demonstrandum erat.

23 huius.

### PROP. 28. THEOREMA.

*Eisdem positis quæ in antecedente; Proportio superficiei solidi rotundi orti ex rotatione baseos cylindrici circa communem baseos (si opus est) productæ cum plano secante intersectionem, ad superficiem*

*ciem solidi rotundi orti ex simili alterius cylindrici baseos rotatione, est composita ex directa proportione radiorum rotationis & directa proportione superficierum truncorum inferiorum.*

FIguræ & præparatio sint eædem sicut in antecedente. Dico superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ DC circa GF esse ad superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ ZXY circa VS in ratione composita ex proportione superficiei trunci 34CD ad superficiem trunci 567YXZ & ex proportione radii rotationis LE ad radium rotationis &T. Ratio superficiei solidi rotundi orti ex figura DC ad superficiem solidi rotundi orti ex figura ZXY est composita, ex ratione superficiei solidi rotundi ex DC orti ad superficiem trunci 34CD, ex ratione superficiei trunci 34GD ad superficiem trunci 567YXZ, & ex ratione superficiei trunci 567YXZ ad superficiem solidi rotundi ex ZXY orti; sed ratio superficiei solidi rotundi ex DC orti ad superficiẽ
24 huius. trunci 34CD est æqualis rationi circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad IL altitudinem cylindrici: & ratio superficiei trunci 567YXZ ad superficiem solidi rotundi ex YXZ orti est æqualis rationi Q& seu IL altitudinis cylindrici ad circumferentiam circuli ex semidiametro T& descripti; & proinde ratio, superficiei solidi rotundi orti ex DC ad superficiem solidi rotundi orti ex ZXY, est composita ex ratione superficiei trunci 34CD ad superficiem trunci 567YXZ, ex ratione circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad rectam IL, & ex ratione rectæ IL ad circumferentiam circuli ex semidiametro T&; sed hæ duæ postremæ rationes componunt rationem circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad circumferentiam circuli ex semidiametro T& descripti, quæ eadem est cum ratione semidiametri LE ad semidiametrum T&: & proinde superficies solidi rotundi orti ex rotatione figuræ DC circa axem FG est ad superficiem solidi rotundi orti ex rotatione

figu-

figuræ XYZ circa axem VS in ratione composita, ex proportione superficiei trunci inferioris 34 CD ad superficiem trũci inferioris 567 YXZ & ex proportione radii rotationis EL ad radium rotationis T&, quod demonstrandum erat.

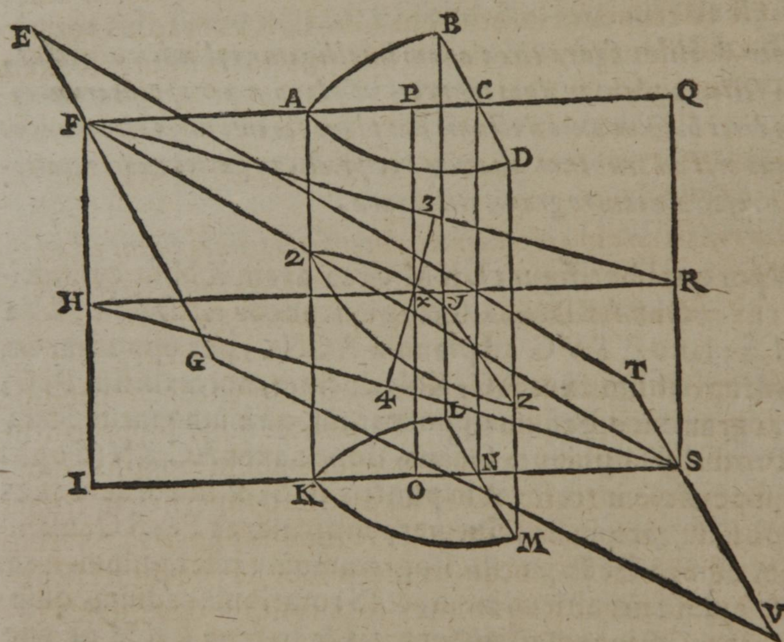
Hoc Theorema etiam locum habet eodemque modo demonstratur in superficiebus rotundis genitis a rotatione lineæ vel linearum quarumcunque figuram non comprehendentium.

*PROP. 29. THEOREMA.*

*Si super qualibet figura circa axem intelligatur cylindricus rectus, ita sectus a plano in duos truncos, vt planum per oppositarum cylindrici basium axes ductum, fiat plano secanti normale; truncus vnus erit ad truncum alterum reciprocè, vt partes radii rotationis resecta a centro grauitatis figuræ.*

SVper qualibet figura LKM circa axem KN sit cylindricus rectus ABDMLK sectus in truncos ABDZY2, ZY2 KLM, a plano ETVG ad planum ACNK, per oppositarum cylindrici basium axes AC, KN, ductum, normali: sint P, O, centra grauitatis basium oppositarum, quæ iungantur recta PO. Producatur planum secans, donec axes AC, KN (si opus est) productos intersecet in punctis F, S; & in eosdem axes (si opus est) productos sint perpendiculares FI, SQ; manifestum est FISQ esse parallellogrammum rectangulum, item FI esse cylindrici altitudinem, & IS rotationis radium, quippe ad intersectionem plani secantis & baseos LKM nempe rectam TV est perpendicularis, quoniam ducitur in plano FQSI, quod vtrique plano & secanti & baseos LKM est normale. Dico truncum ABDZY2 esse ad truncum 2YZ MLK vt reciproce IO ad OS. a mediis punctis rectarum FI, QS, nempe H, R, ducantur rectæ HS, RF, necnon HR secans OP in X; erunt itaque inter se parallellæ &

æquales FI, PO, QS, item FQ. HR, IS, item FR, HS. Quoniam FR bifariam ſecat QS, bifariam quoque ſecabit in triangulo FQS omnes rectas ipſi QS æquidiſtantes; & proinde bifariam ſecabit omnes diametros rectangulorum in trunco ABDZY2 a plano FISQ normaliter ſecatorum; & ideo tranſibit per centra grauitatis omnium eorundem rectangulorum, cumque ipſe truncus conſletur ex omnibus iſtis rectangulis; idcirco tranſibit etiam recta FR per cen-




trum grauitatis ipſius trunci, hoc ſupponatur eſſe 3: eodem modo demonſtratur in HS eſſe centrum grauitatis trunci YZ MLK2: cum ergo X medium punctum rectæ OP ſit centrum grauitatis totius cylindrici; ſi a 3 per X producatur recta 3 X 4 donec rectam HS interſecet in 4, erit 4 centrum grauitatis

tis trunci YZMLK2: & quia triangula XR3, XH4, sunt similia propter parallellas R F, H S, est vt X 4 ad X 3 ita X H ad X R, hoc est, IO ad OS; sed vt X4 ad X3 ita truncus ABDZY2 ad truncum YZMLK2; & proinde ut truncus ABDZY2 ad truncum YZKMK2 ita reciproce IO ad OS, quod demonstrandum erat.

## CONSECTARIVM.

ET proinde componendo totus cylindricus ABDMLK est ad truncum inferiorem YZMLK2 vt radius rotationis IS ad distantiam inter centrum grauitatis figuræ & axem rotationis eiusdem nempe OS.

### *PROP. 30. THEOREMA.*

*Eisdem positis quæ in antecedente; superficies trunci vnius est ad superficiem trunci alterius reciproce, vt partes radij rotationis resectæ a centro grauitatis perimetri figuræ.*

EAdem sit figura & præparatio, quæ in antecedente, hoc solum excepto, quod O, P, puncta nunc supponantur esse contra grauitatis perimetrorum basium oppositarum. Dico superficiem trunci ABDZY2 esse ad superficiem trunci 2YZMLK, vt reciproce IO ad OS. A mediis punctis rectarum FI, QS, nempe H, R, ducantur rectæ HS, RF, necnon HR secans OP in X; erunt itaque inter se parallellæ & æquales rectæ FI, PO, QS, item FQ, HR, IS, item FR, HS. Quoniam FR bifariam secat QS, bifariam quoque secabit in triangulo FQS omnes rectas ipsi QS æquidistantes, & proinde bifariam secabit omnes diametros rectangulorũ in trunco ABDZY2 a plano FISQ normaliter secatorum; & ideo transibit per omnia centra grauitatis oppositorum laterum basi cylindrici perpendicularium vniuscuiusque ex illis rectangulis, quo-

niam in medio diametri est centrum grauitatis laterum oppositorum; cumq; ipsa trunci superficies conflet ur ex omnibus istis lateribus oppositis basi cylindrici perpendicularibus, idcirco transibit etiam recta FR per centrum grauitatis superficiei ipsius trunci, hoc supponatur 3: eodem modo demonstratur in HS esse centrum grauitatis superficiei trunci YZMLK2; cum ergo X medium punctum rectæ OP sit centrũ grauitatis totius superficiei cylindrici, si a 3 per X producatur recta 3X4 donec rectam HS intersecet in 4, erit 4 centrũ grauitatis superficiei trunci YZMLK2: & quia triangula XR3, XH4, sunt similia propter parallellas RF, HS, est vt X4 ad X3 ita XH ad XR, hoc est IO ad OS; sed vt X4 ad X3 ita superficies trunci ABDZY2 ad superficiem trunci YZMLK2; & proinde, vt superficies trunci ABDZY2 ad superficiem trunci YZMLK2, ita reciproce IO ad OS quod demonstrandum erat.

## CONSECTARIVM.

ET componendo tota superficies cylindrici ABDMLK est ad superficiem trunci inferioris YZMLK2 vt radius rotationis IS ad interceptam inter centrum grauitatis perimetri figuræ & axem rotationis eiusdem nempe OS.

Demonstrantur quoque hæc eodem modo in truncis insistentibus lineæ vel lineis quibuscunque figuram non comprehendentibus, si modo sint ad axem.

Duæ præcedentes propositiones sunt etiam veræ in omni cylindrico, sed intricata est constructio generali demonstrationi inseruiens, & ideo nostrum intentum alio modo euincemus.

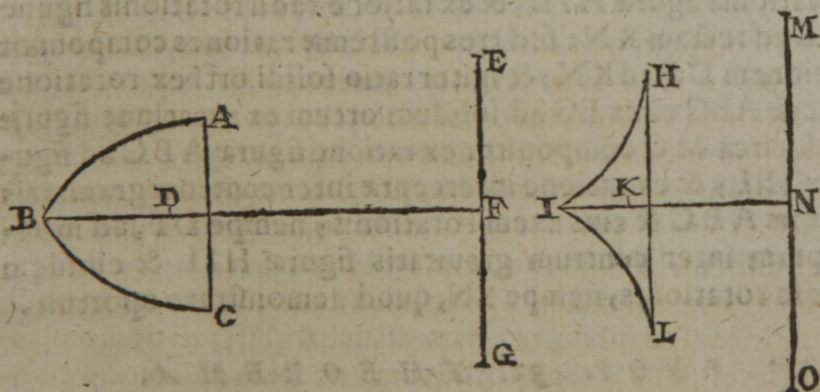
### *PROP. 31. THEOREMA.*

*Si sint duæ figuræ quæcunque circa axes, quæ sic rotentur vt axes rotationis sint figuræ vniuscuiusque axi normales; ratio vnius solidi orti ex tali rotatione ad aliud solidum ex eadem genitum,*

com-

*componitur ex ratione directa figuræ ad figuram, & ex ratione directa interceptæ inter centrum grauitatis & axem rotationis vnius figuræ ad similem interceptam alterius figuræ.*

SInt duę figurę quęcunque ABC, HIL, circa axes BF, IN, quę rotentur circa rectas EG, MO, axes figurarum (si opus est) productos BF, IN, normaliter secantes in punctis F, N, sintque figurarum ABC, HIL, centra grauitatis D, K. Dico rationem, solidi orti ex figura ABC rotata circa rectā EG ad solidum ortum ex figura HIL rotata circa rectam MO, componi ex ratione figurę ABC ad figuram HIL & ex ratione DF ad KN. Super figuris ABC, HIL, intelligantur cylindrici recti ęquialti secti a planis transeuntibus per EG, MO, rectas, vnusquisque in duos truncos nempe superiorem & inferiorem. Ratio solidi ex ABC orti ad solidum ex HIL ortum, componitur ex ratione trunci inferioris cylindrici super ABC ad truncum inferiorem cylindrici super HI




L, & ex ratione radii rotationis figurę ABC ad radium rotationis figurę HIL; sed truncus inferior cylindrici super ABC est ad truncum inferiorem cylindrici super HIL in ratione composita, ex ratione trunci inferioris cylindrici super ABC ad totum cylindricum super ABC, ex ratione to-

tius

tius cylindrici ſuper ABC ad totum cylindricum ſuper HIL, & ex ratione totius cylindrici ſuper HIL ad truncum ſui inferiorem: ſed truncus inferior cylindrici ſuper ABC eſt ad totum cylindricum, vt FD ad rotationis radium figurę ABC ex conſectario huius 29 conuertendo, & cylindricus ſuper ABC eſt ad cylindricum ſuper HIL vt figura ABC ad figuram HIL, item cylindricus ſuper HIL eſt ad truncum ſuum inferiorem vt radius rotationis figurę HIL ad KN, ex conſectario huius 29; & proinde ratio trunci inferioris cylindrici ſuper ABC ad truncum inferiorem cylindrici ſuper HIL cõponitur ex ratione rectæ DF ad rotationis radium figuræ ABC, ex ratione figuræ ABC, ad figuram HIL, & ex ratione radii rotationis figuræ HIL ad rectam KN: & ideo ratio ſolidi orti ex rotatione figuræ ABC ad ſolidum ortum ex rotatione figuræ HIL componitur, ex ratione figuræ ABC ad figuram HIL, ex ratione rectæ DF ad radium rotationis figuræ ABC, ex ratione radii rotationis figuræ ABC ad radiũ rotationis figuræ HIL, & ex ratione radii rotationis figuræ HIL ad rectam KN; ſed tres poſtremæ rationes componunt rationem DF ad KN; & igitur ratio ſolidi orti ex rotatione figuræ ABC circa EG ad ſolidum ortum ex rotatione figuræ HIL circa MO componitur ex ratione figuræ ABC ad figuram HIL, & ex ratione interceptæ inter centrum grauitatis figuræ ABC & eius axem rotationis, nempe DF, ad interceptam inter centrum grauitatis figuræ HIL & eiuſdem axem rotationis, nempe KN, quod demonſtrare oportuit.

## *PROP. 32. THEOREMA.*

*Eiſdem poſitis, quæ in antecedente; ratio, ſuperficiei vnius ſolidi orti ex tali rotatione ad ſuperficiem alterius ſolidi ex eadem geniti, componitur ex ratione directa perimetrorum figurarum & ex ratione directa interceptarum inter centra grauitatis perimetrorum & axes rotationis.*

Eadem

Eædem sint figuræ & præparatio quæ in antecedente, hoc solum excepto, quod D, K, puncta, nunc supponãtur esse centra grauitatis perimetrorum figurarum. Dico rationem superficiei solidi orti ex figura A B C rotata circa rectam E G ad superficiem solidi orti ex figura HIL rotata circa rectam MO, componi ex ratione perimetri ABC ad perimetrum HIL & ex ratione DF ad KN. Super figuris ABC, HIL, intelligantur cylindrici recti æquialti, secti a planis transeuntibus per EG, MO, rectas, vnusquisque in duos truncos, nempe superiorem & inferiorem. Ratio superficiei solidi ex A B C orti ad superficiem solidi ex HIL orti, componitur ex ratione superficiei trunci inferioris cylindrici super A B C ad superficiem trunci inferioris cylindrici super HIL, & ex ratione radii rotationis figuræ A B C ad radium rotationis figuræ HIL; sed superficies trunci inferioris cylindrici super A B C est ad superficiem trunci inferioris cylindrici super H I L in ratione composita, ex ratione superficiei trunci inferioris cylindrici super ABC ad totam superficiem cylindrici super ABC, ex ratione totius superficiei cylindrici super ABC ad totam superficiem cylindrici super H I L & ex ratione totius superficiei cylindrici super H I L ad superficiem trunci sui inferioris: sed superficies trunci inferioris cylindrici super A B C est ad totam superficiem cylindrici vt FD ad rotationis radium figuræ ABC ex consectario huius 30 conuertendo, & superficies cylindrici super A B C est ad superficiem cylindrici super HIL, vt perimeter A B C ad perimetrum HIL, item superficies cylindrici super H I L est ad superficiem sui trunci inferioris vt radius rotationis figuræ H I L ad K N; & proinde ratio superficiei trunci inferioris cylindrici super ABC ad superficiem trunci inferioris cylindrici super HIL componitur, ex ratione rectæ D F ad radium rotationis figuræ ABC, ex ratione perimetri ABC ad perimetrum HIL & ex ratione radii rotationis figuræ HIL ad rectam K N; & ideo ratio superficiei solidi orti ex rotatione

fi-

figurę ABC ad superficiem solidi orti ex rotatione figurę H IL componitur, ex ratione perimetri ABC ad perimetrum H I L, ex ratione rectę D F ad radium rotationis figurę A B C, ex ratione radii rotationis figurę A B C ad radium rotationis figurę H I L, & ex ratione radii rotationis figurę H I L ad rectam K N; sed tres postremę rationes componunt rationē DF ad K N; & igitur ratio superficiei solidi orti ex rotatione figurę ABC circa EG ad superficiem solidi orti ex rotatione figurę HIL circa MO componitur ex ratione perimetri ABC ad perimetrum H I L & ex ratione interceptę inter centrum grauitatis perimetri A B C & eius axem rotationis, nempe D F ad interceptam inter centrum grauitatis perimetri H I L & eiusdem axem rotationis, nempe K N, quod demonstrandum erat.

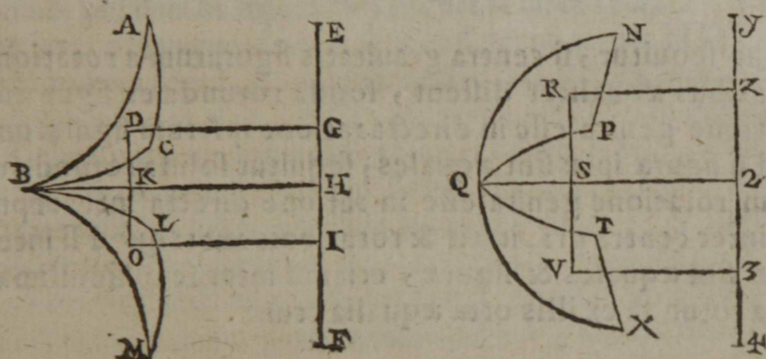
Hęc quoque locum habent, eodemque modo demonstrātur in superficiebus rotundis genitis a rotatione lineę vel linearum quarumcunque figuram non comprehendentium & ad axem existentium.

## PROP. 33. THEOREMA.

*Si sint duæ figuræ quæcunque, quæ rotentur circa axes quoscunque, ratio vnius solidi orti ex tali rotatione ad solidum alterum ex eadem genitum, componetur ex directa ratione figuræ ad figuram, & ex directa ratione interceptæ inter centrum gravitatis & axem rotationis vnius figuræ ad similem interceptam alterius figuræ.*

SInt duæ figuræ quæcunque A B C, N Q P, quæ rotentur circa rectas E F, Y 4; sintque earum contra gravitatis D, R, e quibus in axes rotationis EF, Y4, demittantur rectæ perpendiculares DG, RZ. dico rationem solidi orti ex figura A B C rotata circa rectam E F ad solidum ortum ex figura N QP rotata circa rectam Y 4 componi ex ratione figuræ ABC, ad figuram NQP, & ex ratione DG ad RZ. Parallelæ re-

rectis DG, RZ, ducantur rectæ BH, Q2, figuras ABC, NQP, tangentes in B, Q; & circa rectas BH, Q2, sicut axes, concipiantur reuolui figuræ ABC, QNP, donec ex altera axium parte planum attingentes, efficiant figuras BLM, QTX, sibi ipsis æquales, similes, & ad rectas BH, EF; Q2, Y4, eandē prorsus positionem habentes: sint figurarum BLM, QTX, centra grauitatis, O, V; ducantur in rectas EF, Y4, perpendiculares OI, V3, iungantur quoque rectæ DO, RV, rectas BH, Q2, intersecantes in punctis K, S: manifestum est pun-




ctum K esse centrum grauitatis integræ figuræ BACBLM circa axem BH, item punctum S esse centrum grauitatis figuræ integræ QNPQTX circa axem Q2; patet quoque rectas DG, KH, OI; item RZ, S2, V3, esse inter se æquales. Quoniā figuræ BACBLM, QNPQTX sunt circa axes BH, Q2, axibus rotationis EF, Y4, normales; igitur solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ BACBLM circa rectam EF est ad solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ QNP QTX in ratione composita ex ratione figuræ BACBLM ad figuram QNPQTX & ex ratione KH ad S2 per huius 31; sed solidum ortum ex figura BAC BLM rotata circa EF est duplum solidi orti ex figura BAC circa eandem EF rotata; item solidum ortum ex figura QNP QTX rotata circa rectam Y4 est duplū

solidi orti ex figura QNP rotata circa eandem Y4; figura quoque BACBLM dupla est figuræ BAC, & figura QNPQ TX figuræ QNP; cumque dimidia sint in eadem ratione cum suis duplis; solidum rotundum ortum ex figura ABC rotata circa rectam EF erit ad solidum rotundum ortum ex figura NQP rotata circa rectam Y4 in ratione composita ex ratione figuræ ABC ad figuram NQP & ex ratione KH ad S2, seu DG ad RZ, quod demonstrare oportuit.

## CONSECTARIVM.

Sint sequitur, si centra grauitatis figurarum a rotationis axibus æqualiter distent, solida rotunda ex figurarum rotatione genita esse in directa ratione ipsarum figurarum, quod si figuræ ipsæ sint æquales, sequitur solida rotunda ex earum rotatione genita esse in ratione directa interceptarum inter centra grauitatis & rotationis axes: quod si interceptæ sint æquales & figuræ, etiamsi inter se dissimillimæ, solida rotunda ex illis orta æqualia erunt.

## *SCHOLIVM.*

Ex dictis manifestum est inter duas quascunque figuras tres esse rationes, nempe; figuræ ad figuram, solidi rotundi ex rotatione vnius figuræ geniti, ad solidum rotundum ex rotatione alterius figuræ genitum, & interceptę inter centrum gravitatis & axem rotationis vnius figuræ ad similem interceptam alterius figurę, e quibus duas datas tertiam ignotam semper patefacere.

## *PROP. 34. THEOREMA.*

*Si sint duæ figuræ quæcunque, quæ rotentur circa axes quoscunque; ratio superficiei unius solidi orti ex tali rotatione ad superficiem alterius*

*terius solidi ex eadem geniti, componitur ex directa ratione perimetri ad perimetrum & ex directa ratione intercepta inter centrum gravitatis perimetri & axem rotationis vnius figura ad similem interceptam alterius figura.*

Sint duæ figuræ quæcunque ABC, NQP, quæ rotentur circa rectas EF, Y4; sintque contra gravitatis perimetrorum D, R, a quibus in axes rotationis EF, Y4, demittantur rectę perpendiculares DG, RZ. dico rationem superficiei solidi orti ex figura ABC rotata circa rectam EF ad superficiem solidi orti ex figura NQP rotata circa rectam Y 4 componi, ex ratione perimetri ABC ad perimetrum NQP & ex ratione DG ad RZ. parallellæ rectis DG, RZ, ducantur rectę BH, Q2, figuras ABC, NQP, tangentes in B, Q; & circa BH, Q2, sicut axes concipiantur reuolvi figuræ ABC, QNP, donec ex altera axium parte in idem planum reuolutæ figuras efficiant BLM, QTX, sibi ipsis æquales, similes, & ad rectas BH, EF; Q2, Y4, eandem omnino positionem habentes. Sint perimetrorum BLM, QTX, centra grauitatis O, V; ducantur in rectas EF, Y4, perpendiculares OI, V3; iungantur rectæ DO, RV, rectas BH, Q2, intersecantes in punctis K, S; manifestum est punctum K esse centrum grauitatis integri perimetri BACBLM; estque figura BACBLM circa axem BH; eodem modo punctum S est centrum gravitatis integri perimetri figurę QNPQTX circa axem Q2; patet quoque rectas DG KH, OI, item RZ, S2, V3, esse inter se æquales. quoniam figura BACBLM, QNPQTX, sunt circa axes BH, Q2, axibus rotationis EF, Y4, normales; igitur superficies solidi rotundi orti ex rotatione figuræ BACBLM circa rectam EF est ad solidi rotundi superficiem orti ex rotatione figurę QNPQTX in ratione composita ex ratione perimetri BACBLM ad perimetrum QNPQTX & ex ratione KH ad S2; sed superficies solidi orti ex figura BACBLM rotata circa EF est dupla superficiei solidi orti ex figura BAC rotata circa eandem EF, item 32 huius.

 F, item

F, item superficies solidi rotundi orti ex figura QNPQTX rotata circa rectam Y4 est dupla superficiei solidi orti ex figura QNP rotata circa eandem Y4; perimetrum quoque BACBLM duplum est perimetri BAC, & perimetrum QNPQTX perimetri QNP ( hoc est si figuræ se inuicem tangant in puncto solummodo; quod si se tetigerint in recta linea, oportet imaginari aliquam distantiolam inter figurarum vniones, vt generalis fiat demonstratio) cumque dimidia sint in eadem ratione cum suis duplis, superficies solidi rotundi orti ex figura ABC rotata circa rectam EF erit ad superficiem solidi rotundi orti ex figura NQP rotata circa rectam Y4 in ratione composita, ex ratione perimetri ABC ad perimetrum NQP & ex ratione KH ad SZ seu DG ad RZ, quod demonstrare oportuit.

## CONSECTARIVM.

Hinc sequitur, si centra grauitatis perimetrorum a rotationis axibus æqualiter distent, superficies solidorum rotundorum ex rotatione genitorum esse in directa ratione ipsorum perimetrorum, quod si ipsa perimetra sint ęqualia, superficies solidorum rotundorum ex rotatione genitorum esse in ratione directa interceptorum inter centra grauitatis perimetrorum & rotationis axes, quod si interceptę sint ęquales & perimetra ęqualia, superficies solidorum rotundorum semper esse ęquales.

## *SCHOLIVM.*

Ex dictis ergo manifestum est inter duas quascunque figuras tres alias esse rationes a tribus pręcedentibus diuersas, nempe perimetri ad perimetrum, superficiei solidi rotundi ex rotatione vnius figurę geniti ad superficiem solidi rotundi ex rotatione alterius figurę geniti, & in-

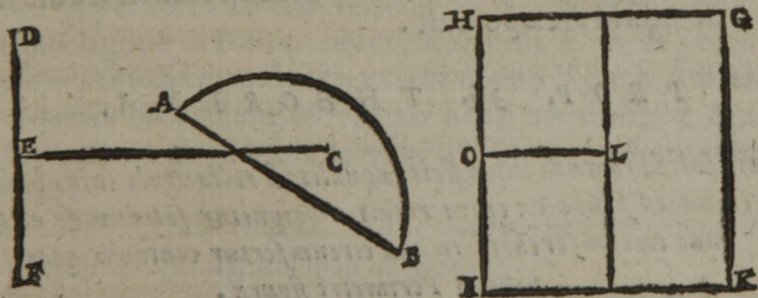
interceptę inter centrum grauitatis perimetri & axem rotationis vnius figurę ad similem interceptam alterius figurę, e quibus duas datas tertiam ignotam semper patefacere.

Eodem modo demonstrantur hęc omnia vniuersaliter in omnibus, linea, vel lineis figuram non comprehendentibus, ita vt omnium demonstrationum geometricarum hę sint maxime vniuersales.

### PROP. 35. THEOREMA.

*Omne solidum rotundum æquale est cylindrico recto cuius basis est figura ex cuius rotatione gignitur solidum & altitudo circumferentia circuli in qua circumuoluitur centrum grauitatis figuræ.*

Sit figura quæcunque A B cuius grauitatis centrum C; ex figuræ A B rotatione circa rectam D F fiat solidum rotundum, quod dico esse æquale cylindrico cuius basis AB figura & altitudo circumferentia circuli, in qua circumrotatur centrum grauitatis C. Sit rectangulum HGKI




cuius centrum grauitatis L; ex rotatione rectanguli HGKI circa latus HI concipiatur fieri cylindrus, & ex grauitatum cen-

centris C, L, in rotationis axes D F, H I, demittantur perpẽdiculares rectæ C E, L O, quæ sunt rotationis radii: manifestum est cylindrum genitum ex rotatione rectanguli H K circa H I æqualem esse solido cuius basis est circulus ex radio I K & altitudo H I, hoc est solido cuius basis est rectangulum ex I K in semicircumferentiam circuli ex radio I K vel totam circumferentiam ex radio O L & altitudo H I, quod idem est cum solido cuius basis est rectangulum H K & altitudo circumferentia circuli ex radio O L; sed cylindrus ex rotatione
33 huius. HK circa HI est ad solidum rotundum ex rotatione AB circa DF in ratione composita ex proportione figuræ HK ad figuram AB & rectæ OL ad rectam E C seu circumferentiæ radii OL ad circumferentiam radii E C, atque solidum cuius basis HK & altitudo circumferentia radii O L, seu cylindrus genitus ex rotatione figuræ HK circa HI, est ad solidum cuius basis A B & altitudo circumferentia radii E C in eadem ratione; & ideo cylindrus ex rotatione figuræ HK circa H I est ad solidum rotundum ex rotatione figuræ AB circa DF vt idem prædictus cylindrus ad solidum cuius basis A B & altitudo circumferentia circuli ex radio E C; & proinde solidum rotundum ex rotatione figuræ AB circa D F æquale est cylindrico cuius basis A B & altitudo circumferentia radii E C, quod demonstrare oportuit.

## *PROP. 36. THEOREMA.*

*Omnis solidi rotundi superficies æqualis est rectangulo cuius basis est Perimeter figuræ ex cuius rotatione gignitur solidum & altitudo circumferentia in qua circumfertur centrum grauitatis Perimetri figuræ.*

Eisdem positis quæ in antecedente, sint centra gravitatis perimetrorum figurarum HK, A B, puncta L, C; dico superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ AB circa

DF esse æqualem rectangulo cuius basis est perimeter figuræ A B & altitudo circumferentia radii E C. manifestum est superficiem cylindri geniti ex rotatione rectanguli HK circa HI equalem esse rectangulo cuius basis est circumferentia radii IK & altitudo GK vna cum IK, hoc est rectangulo cuius basis circumferentia radii O L & altitudo totus figuræ ambitus HG + GK + KI + IH, quod idem est cum rectangulo cuius basis est rectanguli H K ambitus & altitudo circumferentia radii O L ; sed superficies cylindri geniti ex rotatione rectanguli H K circa HI est ad superficiem solidi rotundi geniti ex figuræ AB rotatione circa DF in ratione composita ex proportione ambitus figuræ HK ad ambitum figuræ AB & ex proportione rectæ O L ad rectam E C seu circumferentiæ radii OL ad circumferentiam radii E C; atque rectangulum cuius basis est ambitus figuræ H K & altitudo circumferentia radii O L, seu superficies cylindri geniti ex rotatione rectanguli H K circa HI, est ad rectangulum cuius basis est ambitus figuræ A B & altitudo circumferentia radij E C in eadem ratione ; & ideo superficies cylindri geniti ex rotatione rectanguli HK circa HI est ad rectangulum, cuius basis est ambitus figuræ A B & altitudo circumferentia radii E C, vt idem superficies ad superficiem solidi rotundi geniti ex rotatione figuræ A B circa axem rotationis D F; & proinde superficies solidi rotundi orti ex rotatione figuræ A B circa D F æqualis est rectangulo cuius basis est ambitus figuræ A B & altitudo circumferentia radij E C, quod demonstrare oportuit.

34 huius.

Non dissimili fere methodo demonstratur hæc propositio, etiamsi perimeter figuræ non sit clausus.

## *PROP. 37. THEOREMA.*

*Si cylindricus rectus secetur plano ad basem seminormali; truncus inferior æqualis erit cylindrico cuius basis eadem est cum cylin-*

*drici*

*drici propositi base, & altitudo, intercepta recta inter centrum gravitatis baseos & communem intersectionem baseos & plani secantis.*

Sint eędem figuræ, quæ in antecedente: super figurã AB (cuius gravitatis centrum C) concipiatur cylindricus rectus Sectus à plano basem AB seminormaliter secante in recta DF: dico truncum eius inferiorem æqualem esse cylindrico super base AB habenti altitudinem EC. Solidum rotundum ortum ex rotatione figurę AB circa rectam
35 huius. DF æquale est cylindrico cuius basis AB & altitudo circumferentia radij EC; atque idem solidum rotundum est ad truncum inferiorem cylindrici recti super AB resectam à plano basem AB seminormaliter secante in recta DF ut circumferentia radij CE ad radium CE; sed cylindricus cuius
23 huius. basis AB & altitudo circumferentia radii CE seu prædictum solidum rotundum est ad cylindricum cuius basis AB & altitudo EC, vt circumferentia radii EC ad EC; & proinde truncus ille inferior resectus æqualis est cylindrico cuius basis AB & altitudo EC, quod demonstrare oportuit.

### PROP. 38. THEOREMA.

*Si cylindricus rectus secetur Plano ad basem seminormali; superficies trunci inferioris æqualis erit rectangulo, cuius basis est perimeter baseos cylindrici & altitudo intercepta recta inter centrum grauitatis Perimetri baseos & communem intersectionem baseos & plani secantis.*

Iisdem positis quæ in antecedente, sit C centrum grauitatis perimetri baseos AB. Dico superficiem trunci inferioris æqualem esse rectangulo cuius basis est ambitus figuræ AB & altitudo recta EC. Superficies solidi rotundi geniti ex rotatione figuræ AB circa DF æqualis est rectangulo cuius

cuius basis est ambitus figuræ A B & altitudo circumferentia radii E C; atque eadem superficies solidi rotundi est ad superficiem trunci inferioris cylindrici recti super A B resecti a plano basem A B seminormaliter secante in recta D F, vt circumferentia radii C E ad C E; sed rectangulum cuius basis est ambitus figuræ A B & altitudo circumferentia radii E C seu superficies solidi rotundi geniti ex rotatione figuræ A B circa D F est ad rectangulum cuius basis est ambitus figuræ A B & altitudo E C, vt circumferentia radii E C ad E C; & proinde superficies trunci inferioris resecti æqualis est rectangulo cuius basis est ambitus figuræ A B & altitudo E C, quod demonstrare oportuit. 36 huius. 24 huius.

Eodem modo demonstratur hęc propositio, si superficies cylindrici recti insistat lineę vel lineis perimetrum non claudentibus.

## SCHOLIVM.

IN duabus præcedentibus eisdem mediis demonstratur, quomodocunque secetur cylindricus, in prima, truncum inferiorem esse æquale cylindrico eandem cum proposito basem habenti & altitudinem æqualem perpendiculari rectę ad basem ex eius gravitatis centro excitatę vsque ad planum secans, & in secunda, superficiem trunci inferioris esse æqualem rectangulo basem habenti æqualem perimetro baseos cylindrici propositi & altitudinem æqualem perpendiculari rectæ ad basem cylindrici propositi ex centro grauitatis eius perimetri excitatæ vsque ad planum secans.

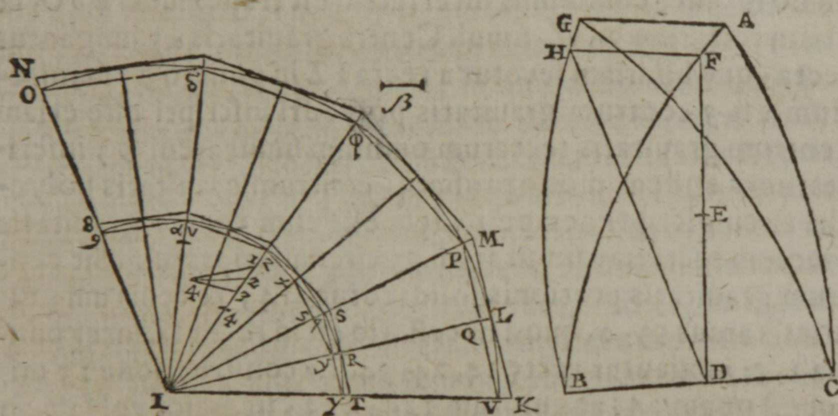
## PROP. 39. THEOREMA.

*Si cylindricus rectus, habens basem ab vna parte à recta terminatam, secetur plano per illam rectam, & rotetur basis cylindrici circa eandem rectam, vt fiat solidi rotundi portio qualibet; erit portionis centrum grauitatis idem cum centro grauitatis arcus*

*circularis, in quo circumfertur centrum æquilibrii trunci cylindrici inferioris in cylindrici base notatum.*

SIt super figura A B C ex vna parte a recta B C terminata cylindricus rectus, qui sectus a plano transeunte per rectam BC exhibeat truncum suum inferiorem BCAG, cuius centrum æquilibrii in base sit E. Ex rotatione figuræ A B C circa rectam B C fiat portio solidi rotundi: dico portionis centrum grauitatis idem esse cum centro grauitatis arcus circularis in quo circumrotatur punctum E: si non sint eadẽ, inter illa sit distantia recta $\beta$; & concipiatur portioni solidi rotundi circumscribi solidum polyedrum constans ex 2 vel 4 vel 16, 32, & vel quotcunque (dummodo numerus sit in progressione dupla a binario) æqualibus truncis inferioribus cylindrici propositi recti secti a plano habente communem intersectionem cum base rectam B C, & eidem portioni solidi rotundi inscribi aliud polyedrum priori simile, ita vt eorum centra grauitatis distent interuallo minore quam recta $\beta$; hoc enim possibile est, quoniam talia polyedra quo plura habent latera, eo in infinitum portioni sunt propiora: deinde per centrum æquilibrii E rectæ B C normale ducatur planum faciens cum trunco communem intersectionem triangulum HFD rectangulum ad F, item cum portione solidi rotundi communem intersectionem sectorem circuli IVLO, & cum polyedro circumscripto polygoni regularis ad sectorem circumscripti, item cum polyedro inscripto similem portionem polygoni regularis sectori eidem inscripti. Manifestum est radium I V esse æqualem rectæ D F. Radio I$\gamma$ æquali rectæ DE sit sector circuli IY9 & sectori IY9 circumscribatur polygonum T S 8 simile polygono K M N, item eidem inscribatur polygonum $\gamma$79 circumscripto simile. Ducatur recta I L quatuor latera similium polygonorum 7$\gamma$, S T, PV, MK, bifariam secans in punctis Y, R, Q, L; manifestum est triangulum I L K rectangulum ad L esse communem se-

ctionem plani ſecantis cum vno æqualium truncorum e quibus conſtat polyedrum portioni ſolidi rotundi circumſcriptum; quem truncum ſupponamus eſſe eundem cum trunco A B C G ( quod ſine abſurdo efficere poſſumus, quoniam omnes trunci inferiores, quorum plana ſecantia baſem ſecan- in recta B C, idem habent in baſe centrum æquilibrii E ) & proinde patet trunci, communem habentis cum plano ſecante interſectionem L I K, centrum æquilibrii in baſe eſſe punctum R; eodemque modo probatur punctum R eſſe in




baſe centrum æquilibrii trunci, cuius interſectio cum plano ſecante eſt MIL; & ideo horum truncorum ſimul iunctorum centrum grauitatis eſt R punctum: eodem modo probatur in duobus quibuslibet truncis totius polyedri circumſcripti ad vnam ſuperficiem iunctis, vtriuſque ſimul trunci centrum grauitatis eſſe in puncto, vbi recta ex vertice I baſem trianguli (quod triangulum eſt communis ſectio plani ſecantis cum duobus iunctis truncis ) bifariam ſecans, arcum circularem 9γ interſecat: facili quoque negotio probatur punctum Y eſſe centrum grauitatis duorum truncorum iunctorum,

quorum cum plano ſecante communis interſectio PIV triangulum; item & punctum X eſſe centrum grauitatis duorum iunctorum truncorum, quorum cum plano ſecante communis interſectio φIP triangulum: iungatur recta XY, quę bifariam ſecatur in puncto 5; manifeſtum eſt punctum 5 eſſę centrum grauitatis quatuor iunctorum truncorum ſimul, quorum cum plano ſecante communis interſectio eſt trapezium IVPφ; atque punctum 5 centrum etiam eſt grauitatis rectarum Z7, 7γ, ſimul: eodem modo probatur α eſſe centrum grauitatis quatuor iunctorum truncorum ſimul, quorum cū plano ſecante communis interſectio eſt trapezium IφδO, & etiam rectarum 9ν, νZ, ſimul. Centra grauitatis α5 iungantur recta, quę bifariam ſecetur a recta IZ in puncto 3; manifeſtum eſt 3 centrum grauitatis polyedri inſcripti eſſe etiam centrum grauitatis rectarum omnium ſimul arcui 9γ inſcriptarum: eodem modo probatur centrum grauitatis polyedri circumſcripti nempe 1 idem eſſe cum centro grauitatis omnium rectarum ſimul arcui 9γ circumſcriptarum. Sit centrum grauitatis portionis ſolidi rotundi 4, & centrum grauitatis arcus 9γ, 2, quod neceſſario eſt in recta IZ inter puncta 1, 3; iungantur rectę 14, 24, 34. Ex conſtructione 13 minor eſt quam 24: angulorum 124, 423, ſit maior vel ſaltem non minor 124, & ideo latus 14 maius erit latere 24, ſed 24 maior eſt quam 13; & proinde 14 maior eſt quam 13; hoc eſt, centrum grauitatis portionis ſolidi rotundi diſtat a cẽtro grauitatis polyedri ſibi circumſcripti maiore interuallo quam centrum grauitatis eiuſdem polyedri circumſcripti diſtat a centro grauitatis ſimilis polyedri inſcripti, quod eſt abſurdum, maiore enim interuallo diſtant centra grauitatis polyedrorum inſcripti & circumſcripti quam diſtant centra grauitatis portionis ſolidi rotundi & polyedri circumſcripti; & proinde nullo interuallo diſtant centra grauitatis portionis ſolidi rotūdi & arcus circularis 9γ, & ideo idem eſt eorum centrum grauitatis, quod demonſtrare oportuit.

No-

Notandum in ſequentibus nos ſemper intelligere ſuperficiem portionis ſolidi rotundi abſque planis quibus terminatur.

PROP. 40. THEOREMA.

*Eiſdem poſitis quæ in antecedente, erit ſuperficiei portionis ſolidi rotundi centrum grauitatis idem cum centro grauitatis arcus circularis, in quo circumfertur centrum æquilibrij ſuperficiei trunci cylindrici inferioris in cylindrici baſe notatum.*

EIſdem poſitis quę in antecedente, ſit ſuperficiei trunci BCAG centrum ęquilibrii in baſe E. Dico ſuperficiei portionis ſolidi rotundi centrum grauitatis idem eſſe cum centro grauitatis arcus circularis in quo circumrotatur pũctum E: ſi non ſint eadem, inter illa ſit differentia recta $\beta$; & concipiatur portioni ſolidi rotundi circumſcribi ſolidum polyedrum conſtans ex 2, 4, 8, 16 vel quotcunque (dummodo numerus ſit in progreſſione dupla a binario) ęqualibus trũcis inferioribus cylindrici propoſiti recti ſecti a plano habẽte communem ſectionem cum baſe rectam BC, & eidem portioni ſolidi rotundi inſcribi aliud polyedrum priori ſimile, ita vt centra grauitatis eorum ſuperficierum diſtent minore interuallo quam $\beta$; hoc enim poſſibile eſt, quoniam talia polyedra quo plura habent latera eo in infinitum eorum ſuperficies minus inter ſe diſcrepant, ita vt eorum differentia minor poſſit eſſe quacunque propoſita quantitate. Deinde per centrum ęquilibrii E rectę BC normale ducatur planum faciens cum trunco ABCG communem ſectionem triãgulum HFD rectangulum ad F, item cum portione ſolidi rotundi cõmunem ſectionẽ, ſectorẽ circuli IVLO & cum polyedro circumſcripto portionẽ polygoni regularis ad ſectorem circumſcripti, item cum polyedro inſcripto ſimilem portionem polygoni regularis ſectori eidem inſcripti. Manifeſtum eſt radium IV eſſe æqualem rectæ DF: radio I$\gamma$ æquali rectę

DE ſit ſector circuli I$\gamma$9, & ſectori I$\gamma$9 circumſcribatur polygonum TS8I ſimile polygono IKMN, item eidem inſcribatur polygonum I$\gamma$79 circumſcripto ſimile. Ducatur recta IL latera quatuor parallela ſimilium polygonorum 7$\gamma$, ST, PV, MK, bifariam diuidens in punctis Y, R, Q, L; manifeſtum eſt triangulum ILK rectangulum ad L eſſe commune ſectionem plani ſecantis cum vno æqualium truncorum ex quibus conſtat polyedrum portioni ſolidi rotundi circumſcriptum, quem truncum ſupponamus eſſe eandem cũ trunco ABCG (quod ſine abſurdo efficere poſſumus, quoniam omnes trũcorum inferiorum ſuperficies, quorum plana ſecantia baſem ſecant in recta BC, idem habent in baſe centrum æquilibrii E) & proinde patet ſuperficiei trunci, communem habentis cum plano ſecante interſectionem LIK, centrum æquilibrij in baſe eſſe punctum R; eodemque modo probatur punctum R eſſe in baſe centrum æquilibrii ſuperficiei trunci, cuius interſectio cum plano ſecante eſt MIL, & ideo horum truncorum ſimul iunctorum ſuperficiei centrum grauitatis eſt R: eodem modo probatur in duobus quibuslibet truncis totius polyedri circumſcripti ad vnam ſuperficiem iunctis vtriuſque ſimul ſuperficiei centrum grauitatis eſſe in puncto, vbi recta ex vertice I baſem trianguli (quod triangulum eſt cõmunis ſectio plani ſecantis cum duobus iunctis truncis) bifariam ſecans, arcum circularem 9$\gamma$ interſecat: facili quoque negotio probatur punctum Y eſſe centrum grauitatis ſuperficiei duorum iunctorum truncorum, quorum cum plano ſecante communis interſectio IPV; item & punctum X eſſe centrum grauitatis ſuperficiei duorum iunctorum truncorum, quorum cum plano ſecante communis interſectio $\varphi$IP triangulum: iungatur recta XY, quæ bifariam ſecatur in puncto 5; manifeſtum eſt punctum 5 eſſe centrum grauitatis ſuperficiei quatuor iunctorum truncorum ſimul, quorum cũ plano ſecante communis interſectio eſt trapezium IVP$\varphi$; atque punctum 5 centrum etiam eſt grauitatis rectarum Z7,

$9\gamma$, simul: eodem modo probatur $\alpha$ centrum gravitatis rectarum $9\nu$, $\nu z$, esse centrum grauitatis superficiei quatuor iunctorum truncorum simul, quorum cum plano secante communis intersectio est trapezium I $\varphi$ $\delta$ O. Centra grauitatis $\alpha$, 5, iungantur recta $\alpha$ 5, quæ bifariam secetur in 3. manifestum est 3 centrum grauitatis superficiei polyedri inscripti esse etiam centrum grauitatis rectarum omnium simul arcui $9\gamma$ inscriptorum. eodem modo probatur centrum grauitatis superficiei polyedri circumscripti nempe 1 idem esse cum centro grauitatis omnium rectarum arcui $9\gamma$ circumscriptorum. Sit centrum gravitatis superficiei portionis solidi rotundi 4 & centrum grauitatis arcus $9\gamma$, 2, quod necessario est in recta IZ inter puncta 1, 3; iungantur rectæ 14, 24, 34: & constructione 13 minor est quam 24: angulorum 124, 423, sit maior vel saltem non minor 124, & ideo latus 14 maius est latere 24, sed 24 maior est quam 13, & proinde 14 maior est quam 13, hoc est, centrum grauitatis superficiei portionis solidi rotundi distat a centro grauitatis superficiei polyedri sibi circumscripti maiore interuallo quam centrum grauitatis superficiei eiusdem polyedri circumscripti distat à cẽtro grauitatis superficiei similis polyedri inscripti, quod est absurdum, maiore enim interuallo distant centra grauitatis superficierum polyedrorum inscripti & circumscripti, quam distat centrum grauitatis superficiei portionis solidi rotundi a centro gravitatis superficiei polyedri siue inscripti siue circumscripti; & proinde nullo interuallo distant centra grauitatis superficiei portionis solidi rotundi & arcus $9\gamma$, & ideo idem est eorum centrum grauitatis, quod demonstrandum erat.

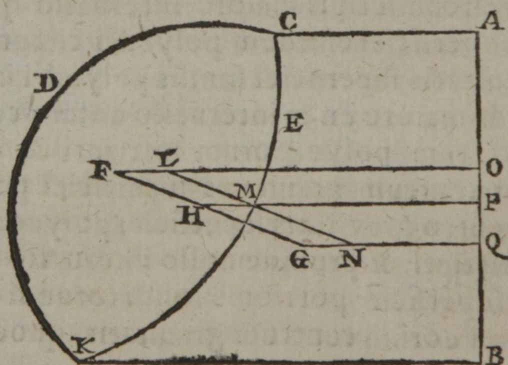
Eodem modo demonstratur hæc propositio de superficie quacunque rotunda facta a rotatione vnius lineę vel plurium linearum circa axem; modo radius rotationis illas non secet in pluribus punctis.

PROP.

## PROP. 41. THEOREMA.

*Si cylindricus rectus secetur plano quocunque & rotetur basis cylindrici circa communem intersectionem baseos & plani secantis, vt fiat solidi rotundi portio qualibet; erit portionis centrum grauitatis idem cum centro grauitatis arcus circularis, in quo circumfertur centrum æquilibrij trunci cylindrici inferioris in cylindrici base notatum.*

CONcipiatur cylindricus rectus super base quacunque KECD sectus à plano habente cum base communem intersectionem AB rectam: sit que trunci inferioris centrum æquilibrii in base notatum punctum F. ex rotatione figure KECD circa rectam AB fiat portio solidi rotundi; cuius centrũ grauitatis dico idem esse cum centro grauitatis arcus circularis in quo circumfertur punctum F. iungantur ad libitum




lineæ CA, KB, supponaturque cylindricus rectus super base ACDKB secari etiam à prædicto plano secante per rectam A B, & eius trunci inferioris centrum æquilibrii in base esse punctum H, item trunci super figura ACEKB centrum æquilibrii

librii in base esse punctum G. ex rotatione figuræ ACDKB circa rectam AB (ita ut eius pars extrema, nempe figura CDKE, describat prædicti solidi rotundi portionem) fiat solidi rotundi portio, cuius centrum grauitatis M; manifestum est solidi rotundi portionem genitam a rotatione figuræ ACDKB esse æqualé portionibus, solidi rotundi genitæ à rotatione figuræ CDKE (cuius centrum gravitatis L) & solidi rotundi genitæ à rotatione figuræ ACEKB (cuius centrum grauitatis N) item truncum super figura ACDKB æqualé esse truncis super figuris CDKE, ACEKB; & proinde patet pũcta F, H, G, esse in vna recta, item FH esse ad HG ut truncus super ACEKB ad truncum super CDKE, item puncta L, M, N, esse in vna recta, & LM esse ad MN vt portio solidi rotundi geniti a figura ACEKB ad portionem solidi rotundi geniti a figura CDKE; sed portiones solidorum rotundorum inter se sunt in directa ratione truncorũ, vt facile colligitur ex huius 23; & ideo vt FH ad HG ita LM ad MN. per puncta F, L, sit recta FLO, & per puncta H, M, recta HMP, item per puncta G, N, sit recta GNQ; satis patet rectas HMP, GNQ (cum sint radii circulorum, in quorum circumferentiis rotantur puncta H, G,) & ideo rectam etiam FLO esse inter se parallelas & rectæ AB normales, & ideo vt PM ad PH vel QN ad QG ita OL ad OF; sed M, N, sunt centra grauitatis arcuum circularium similium in quibus rotantur puncta H, G, circa centra P, Q; & ideo L est etiam centrum grauitatis similis arcus circularis in quo rotatur punctum F circa centrum O, atque L est etiam centrum grauitatis portionis solidi rotundi geniti ex rotatione figuræ CDKE circa rectam AB, quod demonstrare oportuit.

## PROP. 42. THEOREMA.

*Si linea vel lineæ quotcunque rotentur circa rectam, vt ex iis generetur portio superficiei rotundæ, etiamsi radius rotationis illas in quotcunque punctis secuerit; erit portionis superficiei rotundæ*

*centrum grauitatis idem cum centro gravitatis arcus circularis in quo circumfertur centrum æquilibrij in base notatum superficiei trunci cylindrici recti secti à plano habente communem sectionem cum base axem rotationis.*

SIt linea, vel lineæ quotcunque A B O, quæ supponantur rotari circa axem I K, secenturque in duobus punctis à radio rotationis. Super lineis A B O imaginetur superficies cylindrica ad basem recta, quæ secetur à plano basem etiam



secante in recta I K; sitque superficiei trunci inferioris centrum æquilibrii in base E. ex rotatione linearum A B O fiat portio superficiei rotundæ; cuius centrum gravitatis F dico esse idem cum centro grauitatis arcus circularis in quo rotatur punctum E. sit B punctum in quo radius rotationis lineas A B O tangit, sitque portionis superficiei trunci super linea vel lineis A B centrum æquilibrii in base C, & portionis superficiei rotundæ ex A B genitæ D; sitque superficiei trun-

ti super OB centrum æquilibrii in base G, & portionis superficiei rotundæ ex ea genitæ centrum grauitatis H. manifestum est puncta C, E, G, esse in eadem recta, item & CE esse ad EG ut superficies trunci super OB ad superficiem trunci super AB: eodem modo patet puncta D, F, H, esse in eadem recta, item DF esse ad FH vt portio superficiei rotundæ genitæ ex OB ad portionem superficiei rotundæ genitæ ex AB; sed portiones superficierum rotundarum inter se sunt in directa proportione superficierum truncorum ut colligitur ex huius 24; & ideo vt CE ad EG ita DF ad FH. producantur rectæ CD, EF, GH, donec rectam IK secent in punctis L, M, N; cum puncta D, H, sint centra grauitatis arcuum circularium in quibus rotantur puncta C, G, manifestum est rectas CDL, GHN, esse axi rotationis IK normales & inter se parallellas; & ideo recta EFM eidem IK est est normalis, cum sit vt CE ad EG ita DF ad FH; & proinde ut LD ad LC vel NH ad NG ita MF ad ME, sed D, H, sunt centra grauitatis arcuum circularium similium in quibus rotantur puncta C, G; & igitur punctum F est etiam centrum grauitatis similis arcus circularis in quo rotatur punctum E, quod demonstrandum erat. 40 huius.

Eodem modo demonstratur hoc theorema quando radius rotationis lineas secat in tribus punctis supponendo hanc propositionem, sicut hæc supponit huius 40 & sic deinceps (quando secatur linea in pluribus punctis) anteriores demonstrationes semper supponendo.

## *PROP. 43. THEOREMA.*

EIsdem positis quæ in huius 6; dico solidum rotundum genitum ex rotatione figuræ ABSO circa rectam AB esse ad cylindrum genitum ex rotatione rectanguli ABRO circa eandem AB, vt superficies genita ex rotatione curvæ AQ circa eandem AB ad circulum ex radio AO. figura ABSO est proportionaliter analoga curvæ AQ, & ideo centra gra- 2 huius.

 vitatis

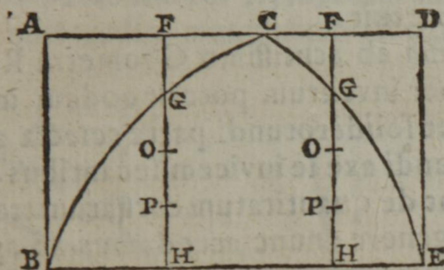
vitatis figuræ ABSO & curvæ A Q eôdem interuallo diſtant à recta AB, quod interuallum ſit K: centra quoque grauitatis rectæ A O & rectanguli ABRO eodem interuallo diſtant à
2 huius. recta AB nempe $\frac{BR}{2}$, atque figura ABSO eſt ad rectangulum A B R O vt curua AQ ad rectam AO, & ideo primam & tertiam ducenda in circumferentiam cuius radius K, & ſecundam & quartam in circumferentiam cuius radius $\frac{BR}{2}$; erit cylindricus cuius baſis ABSO & altitudo circumferentia ex radio K nempe ſolidum rotundum genitum ex rotatione figuræ ABSO circa A B, ad cylindricum cuius baſis A B R O &
35 huius. altitudo circumferentia radii $\frac{BR}{2}$ nempe cylindrum genitum
36 huius. ex rotatione ABRO circa AB, ſicut rectangulum cuius baſis AQ & altitudo circumferentia radii K nempe ſuperficies genita ex rotatione A Q circa A B, ad rectangulum cuius baſis AO & altitudo circumferentia radii $\frac{BR}{2}$ nempe circulũ ex radio AO, quod demonſtrare oportuit.

## *PROP. 44. THEOREMA.*

SIt figura quæcunque BCE cum rectangulo circumſcripto ABED, quæ ſi librentur ex recta B E; dico momentum rectanguli ABED ad momentum figuræ BCE eſſe ut cylindrus factus ex revolutione rectanguli A B E D circa B E ad ſolidum rotundum factum ex revolutione B C E circa eandem B E. Sit rectæ A B parallela & æqualis quæcunque FH figuram BCE ſecans in G: biſecentur rectæ F H, G H, in punctis O, P; manifeſtum eſt momentum rectæ FH eſſe ad momentum rectæ G H in ratione compoſita ex ratione F H ad G H & ex ratione O H ad P H, hoc eſt in duplicata ratione FH ad GH ſeu ut circulus ex radio F H ad circulum ex radio GH, cumque hoc ſemper ita eveniat, & primæ & tertiæ ſem-

per

per sint eædem; erit, vt momenta omnium FH nempe momentum totius rectanguli ABED ad momenta omnium GH nempe momentum figuræ BCE, ita circuli omnes ex radiis




FH nempe cylindrus ex rotatione rectanguli ABED circa BE ad circulos omnes ex radiis GH nempe solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ BCE circa eandem BE, quod demonstrare oportuit.

## *PROP. 45. THEOREMA.*

EIsdem positis quæ in antecedente; si solida rotunda orta ex rotatione rectanguli ABED & figuræ BCE circa BE secentur per rectam BE plano quod horizonti sit perpendiculare, & semisolida ex recta BE librentur: dico momentum semisolidi ADEB esse ad momentum semisolidi BCE vt omnes cubi ab FH ad omnes cubos a GH: sint semicirculorum FH, GH, centra grauitatis O, P; manifestum est momentum semicirculi FH ad momentum semicirculi GH esse in ratione composita ex ratione semicirculi FH ad semicirculum GH nempe ex duplicata ratione FH ad GH & ex ratione OH ad PH seu FH ad GH; & ideo momentum semicirculi FH est ad momentum semicirculi GH in triplicata ratione FH ad GH, seu vt cubus ab FH ad cubum a GH, cum-

que

que hoc semper ita eueniat, & primæ & tertiæ semper sint eædem; erit, vt momenta omnium semicirculorum FH nempe momentum ipsius semisolidi B A D E ad momenta omnium semicirculorum G H nempe momentum ipsius semisolidi BCE vt omnes cubi ab F H ad omnes cubos a G H, quod demonstrare oportuit.

Hoc Theorema ab acutissimo Geometra R. P. Stephano de Angelis nuper inventum poterit eodem modo demonstrari de qualibet solidi rotundi parte resecta a duobus planis in solidi rotundi axe se invicem secantibus.

Hæc dicta sint de quantitatum curuarum transmutatione & mensura in genere; nunc accedamus ad applicationem in casibus particularibus, quæ cetræ facilis est, potest enim nullo negotio ab Analysta perfici; sed nos varietati studentes, aliquando purè geometrice, aliquando purè analyticè, aliquando partim geometricè partim analyticè propositum demonstrabimus; hinc enim facilè percipiet sagax Lector quid in omni casu exhibito agendum sit.

## PROP. 46. PROBLEMA.

*Inuenire circulum æqualem superficiei conoidis Parabolicæ.*

SIt conois parabolica genita ex reuolutione semiparabolæ ABC circa axem A B; cuius superficiei oportet inuenire æqualem circulum. Producatur BA in D vt AD sit quarta pars lateris recti, tangatque parabolam in vertice A recta AE æqualis dimidio lateris recti; & axe D B per E ducatur parabola DEK ordinatim applicatæ BC productę occurrent in K: sitque X recta diameter quadrati æqualis segmento parabolico A E K B. dico rectam X esse radium circuli æqualis superficiei conoidis parabolicę genitæ ex rotatione semiparabolæ ACB circa axem AB. ex quolibet puncto curvæ parabolicæ AC nempe M demittatur in axem ordinatim ap-

applicata M G, quæ producatur donec exteriorem curvam parabolicam DEK interſecet in N; ſitque G H recta æqualis dimidio lateris recti, patet ex multorum demonſtrationibus rectam MH tangentem in puncto M normaliter ſecare. Deinde ex doctrina parabolarum aſymptotarum a Gregorio a S. Vincētio & aliis tradita, manifeſtum eſt parabolas ABC,

D
A
E
G
N
X
M
H
B
C
K

DBK, eſſe aſymptotas; & ideo (ex eadem doctrina) quadratum rectæ GN eſt æquale quadratis rectarum GM, AE, hoc eſt, quadratis rectarum GM, GH; illis autem quadratis æquale eſt quadratum rectæ M H; rectæ igitur H M, GN, ſunt æquales: cumque hoc ſemper fiat in omnibus punctis curuæ parabolicæ AMC; manifeſtum eſt ex huius 3 ſegmentum parabolicum A E K B eſſe æquale ſuperficiei trunci ſuper curua AMC ſectæ a plano per rectam A B tranſeunte, & in angulo ſemirecto cum parabola ſeu baſe trunci inclinatæ; & igitur cum quadratum rectæ X ſit duplum ſuperficiei 25 huius

trun-

trunci, erit X radius circuli æqualis superficiei conoidis a rotatione curuæ parabolicæ AMC circa axem AB genitæ, quod demonstrandum erat.

Hinc etiam manifestum est centrum grauitatis superficiei conoidis parabolicæ idem esse cum centro æquilibrii segmenti parabolici AENKB in axe AB: est enim segmentum AEKB magnitudine & grauitate analogum cum superficiei trunci ex huius 3, & superficies trunci est magnitudine & grauitate analoga cum superficie conoidis ex huius 24: Sed ex hac ipsa propositione sequitur illa analogia in magnitudine & grauitate, quoniam eadem quæ demonstrantur de integris eodem modo demonstrantur de partibus earum proportionalibus v. g. eodem modo demonstratur sectionem superficiei conoidis parabolicæ genitæ ex reuolutione curvæ MC esse æqualem circulo cuius radii quadratum duplum est segmenti GNKB, quo demonstrata est præsens propositio.

## PROP. 47. PROBLEMA.

*Inuenire circulum æqualem superficiei sphæroidis oblongæ.*

SIt sphærois oblonga genita ex revolutione semiellipseos EFT circa axem longiorem ET; cuius superficiei oportet inuenire circulum æqualem. In verticibus T, E, ellipsem tangant rectæ TR, ED, æquales semissi lateris recti: deinde centro G, vertice F per puncta D, R, ducatur ellipsis DFR; & segmento elliptico DFRTE fiat æquale quadratum, cuius diameter sit X. dico X esse radium circuli æqualis superficiei sphæroidis oblongæ propositæ. producatur ellipsis DFR, donec axem ET productum intersecet in punctis Z, B; facile patet rectas GZ, FG, esse semiaxes coniugatos semiellipseos BFZ. semiellipses tangentes in verticibus B, E, T, Z, ducantur rectæ BA, EC, TQ, ZY, omnes æquales rectæ FG, & iungatur recta ACFQY; ducantur

quo.

quoque GQ, GR, & GY, quæ QT ſecet in S. ex quolibet ſemiellipſeos datæ puncto N in axem ET ſit perpendicularis NP, quæ producatur vt rectam AY ſecet in I & rectas GY, GR, GQ, in punctis O, M, L, & ellipſem BFZ in K. ſit recta PH æqualis rectæ PM, & iungatur HN; manifeſtum eſt ( ex fran: a ſchotten commentariis in Carteſium pag: 214) HN normaliter ſecare tangentem ellipſeos in puncto N. ob ellipſem FRZ & rectangulum ex ſemiaxibus FGZY, cuius diameter GY, quadratum rectæ QT eſt æquale quadratis rectarum RT, TS; cumque rectæ LP, MP, OP, ſint in eadem ratione cum rectis QT, RT, ST; erit quadratum rectæ LP ęquale quadratis rectarum MP, OP; ſed quadratum rectę IP ęqualis eſt quadratis rectarum LP, NP, ob antenominatam proprietatem ellipſeos; & ideo quadratum rectę IP ęquale ęſt quadratis rectarum MP, NP, OP; ſed quadratum rectę IP ęquale eſt etiam quadratis rectarum OP, KP; & proinde quadrata rectarum MP, NP, OP, ſunt ęqualia quadratis rectarum KP, OP; & ęqualia auferendo, quadratum rectę KP ęquale eſt quadratis rectarum MP, NP, ſeu HP, NP, ſed quadratũ rectę HN æquale eſt eiſdem quadratis; & ideo rectæ HN, KP, ſunt ęquales; cumque hoc ſemper fiat in omnibus punctis curuę ellipticę EFT, manifeſtum eſt ex huius 3 ſegmentum ellipticum EDFRT eſſe ęquale ſuperficiei trunci ſuper curua EFT ſectæ a plano per rectam ET tranſeunte, & in angulo ſemirecto cum baſe trunci inclinante; & igitur cum

quadratum rectæ X ſit duplum ſuperficiei trunci erit X radius circuli æqualis ſuperficiei ſphæroidis genitæ a rotatione curuę EFT circa axem ET, quod demonſtrare oportuit.

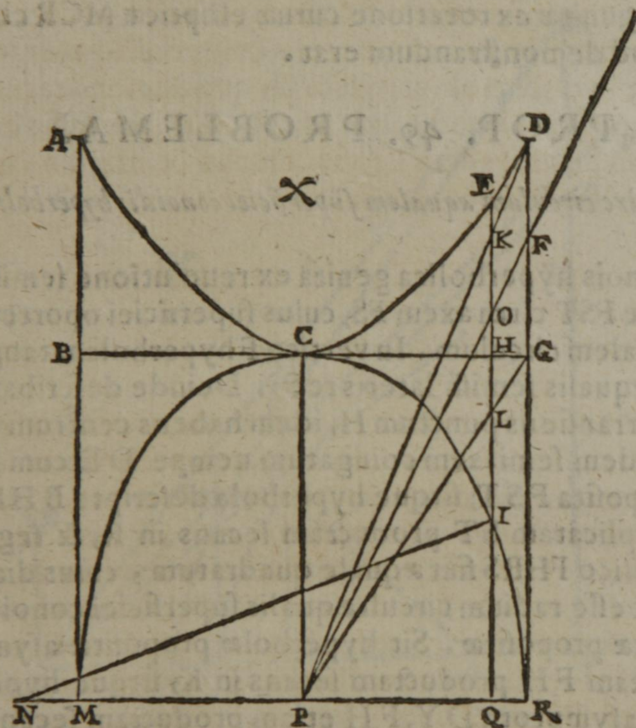
Hinc etiam patet quod ſuperficies ſphæroidis ſit magnitudine & gravitate analoga cum ſegmento elliptico EDFRT, idem enim quod demonſtratur de integris, non diſſimili methodo demonſtratur de partibus earum proportionalibus v. g. eodem modo demonſtratur ſuperficies genita ex rotatione curuæ FN æqualis circulo cuius radii quadratum duplum eſt ſegmenti elliptici FKPG, quo demonſtrata eſt præſens propoſitio; quod etiam in tribus ſequentibus eſt intelligendum, cum eadem ſit ratio huius & illarum, me enim tædet eadem ſemper repetere.

## PROP. 48. PROBLEMA.

*Inuenire circulum æqualem ſuperficiei ſphæroidis latæ.*

SIt ſphærois lata genita ex rotatione ſemiellipſeos MCR circa axem breuiorem MR, cuius ſuperficiei oportet inuenire æqualem circulum. In verticibus M, R, ellipſem tangant rectæ MA, RD, æquales ſemiſſi lateris recti. Deinde centro P, vertice C, per puncta A, D, ducatur hyperbola ACD, & ſegmento hyperbolico ACDRM fiat æquale quadratum cuius diameter recta X. dico X eſſe radium circuli æqualis ſuperficiei ſphæroidis latæ propoſitę. Sit hyperbolæ aſymptota PF rectam DR ſecans in F, ſitque hyperbolam tangens in vertice recta BCG, & iungantur rectæ PD, PG. ex quolibet ellipſeos puncto I in axem MR ſit perpendicularis IQ, rectas CG, PD, PF, PG, interſecans in punctis H, K, O, L, item hyperbolam interſecans in E. Sit recta QN æqualis rectæ QK; manifeſtum eſt (ex commentarius Franciſc. a Scotten in Carteſium pag. 214) rectam NI ellipſem tangentem in puncto I normaliter ſecare. quoniam PF eſt hyperbo-

læ asymptota & C G recta hyperbolam tangens in vertice & GR æqualis axis semissi C P; erit quadratum rectę D R ęquale quadratis rectarum RF, RG; cumque rectę KQ, OQ, LQ, sint proportionales rectis DR, FR, GR; erit quadratum rectę KQ æquale quadratis rectarum OQ, LQ, sed quadratum




rectæ E Q est æquale quadratis rectarum H Q, O Q, & quadratum rectæ HQ æquale est quadratis rectarum IQ, LQ; & ideo quadratum rectæ E Q æquale est quadratis rectarum I Q LQ, OQ, hoc est, quadratis rectarum IQ, KQ, seu IQ, QN, sed quadratum rectæ I N æquale est eisdem quadratis; sunt

 ergo

ergo æquales rectæ EQ, I N; cumque hoc ſemper fiat in omnibus punctis curuæ ellipticæ MCR, manifeſtum eſt ex huius 3 ſegmentum hyperbolicum A C D R M eſſe æquale ſuperficiei trunci ſuper curua elliptica M CR ſectæ a plano per rectã MR tranſeunte, & in angulo ſemirecto cum baſe trunci inclinante; & igitur cum quadratum rectæ X ſit duplum ſuperficiei trunci, erit X radius circuli æqualis ſuperficiei ſphæroidis latæ genitæ ex rotatione curuæ ellipticæ MCR circa axẽ MR, quod demonſtrandum erat.

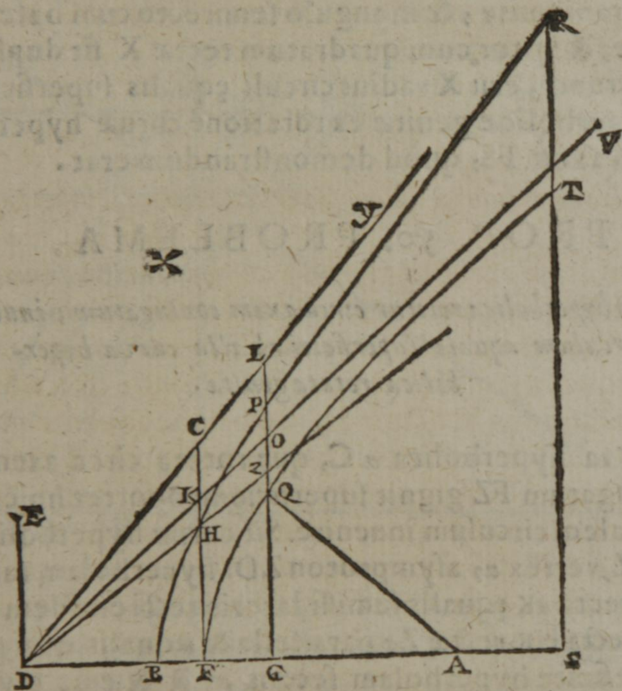
25 huius.

## PROP. 49. PROBLEMA.

*Inuenire circulum æqualem ſuperficiei conoidis hyperbolicæ.*

SIt conois hyperbolica genita ex reuolutione ſemihyperbolæ FST circa axem FS, cuius ſuperficiei oportet inuenire æqualem circulum. In vertice F hyperbolam tangat recta FH æqualis ſemiſſi lateris recti. Deinde deſcribatur hyperbola tranſiens punctum H, idem habens centrum nempe D & eundem ſemiaxem coiugatum nempe DE cum hyperbola propoſita F ST; ſitque hyperbola deſcripta B HR ordinatim applicatam ST productam ſecans in R; & ſegmento hyperbolico FHRS fiat æquale quadratum, cuius diameter X: dico X eſſe radium circuli æqualis ſuperficiei conoidis hyperbolicæ propoſitæ. Sit hyperbolæ propoſitæ aſymptota DV, rectam FH productam ſecans in K, ſitque hyperbolæ inuentæ aſymptota DY, FH etiam productam ſecans in C, & producatur recta DH. Ex quolibet hyperbolæ propoſitæ puncto Q axi applicetur ordinatim recta QG, quæ producta rectas DH, DV, DY, interſecet in punctis Z, O, L, & hyperbolam inuentam in puncto P; ſitque GA æqualis rectæ GZ, manifeſtum eſt (ex Fran. a Schotten commentariis in Carteſium pag. 216.) iunctam rectam QA tangentem hyperbolam in puncto Q normaliter ſecare. Quoniam recta FK hyper-

bolam tangens in vertice producitur ad eius aſymptotam in puncto K, erit FK æqualis eius ſemiaxi coniugato D E; & ob hyperbolam B H R & eius aſymptotam D Y, quadratum rectæ F C æquale eſt quadratis rectarum F H, D E, hoc eſt FH, FK; cumque rectæ G Z, G O, G L, ſint in eadem ratione




cum rectis FH, FK, FC; erit quadratum rectæ GP æquale quadratis rectarum G O, G Z; ſed ob hyperbolam F Q T & eius aſymptotam D V, quadratum rectæ G O, æquale eſt quadratis rectarum G Q, D E; & ideo quadratum rectæ G L æquale quadratis rectarum GZ, G Q, D E; ſed quadratum rectæ GL æquale eſt etiam quadratis rectarum G P, D E; & ideo æqua-

lia

lia auferendo, quadratum rectę GP æquale eſt quadratis rectarum G Z, G Q. hoc eſt, quadratis rectarum G A, G Q; his autem quadratis ęquale eſt quadratum rectę A Q, æquales ergo ſunt rectę GP, A Q; cumque hoc ſemper eveniat in omnibus punctis curvę hyperbolicę FQT, manifeſtum eſt ex huius 3 ſegmentum hyperbblicum FHRS ęquale eſſe ſuperficiei trunci ſuper curua hyperbolica FQT ſectæ a plano per rectam FS tranſeunte, & in angulo ſemirecto cum baſe trunci inclinante; & igitur cum quadratum rectæ X ſit duplum ſuperficiei trunci, erit X radius circuli ęqualis ſuperficiei conoidis hyperbolicæ genitæ ex rotatione curuæ hyperbolicæ FQT circa axem FS, quod demonſtrandum erat.

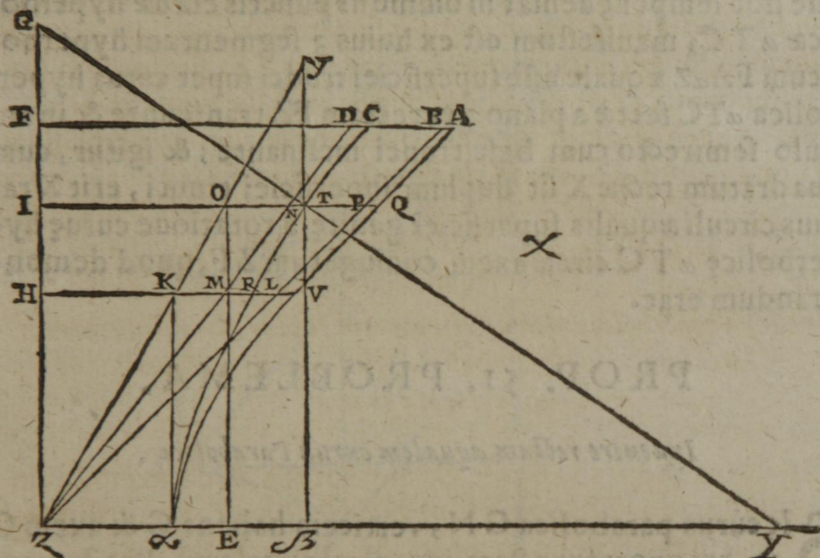
## PROP. 50. PROBLEMA.

*Si curva hyperbolica rotetur circa axem coniugatum; inuenire circulum æquale ſuperficiei ab illa curva hyperbolica rotata genitæ.*

SIt curva hyperbolica α C, quę rotata circa axem ſuum coniugatum FZ gignit ſuperficiem; oportet huic ſuperficiei æqualem circulum inuenire. Sit curuæ hyperbolicę α C centrum Z, vertex α, aſymptoton ZD: hyperbolam tangat in vertice α recta αK ęqualis ſemiſſi lateris recti eiuſdem hyperbolæ: ſit recta HK rectæ Zα parallella & æqualis, quæ producatur indefinite hyperbolam ſecans in R & eius aſymptoton Z D in M; & in illa ſumatur recta H V, cuius quadratum æquale ſit quadratis rectarum HR, HK: deinde centro Z vertice α ſit hyperbola αVA, quæ producatur donec rectam FCA parallelam rectæ Zα interſecet in A; & ſegmento hyperbolico F A V α Z fiat æquale quadratum, cuius diameter X: dico X eſſe radium circuli quæſiti. Sit hyperbolæ inuentæ aſymptoton Z B rectam H V ſecans in L, & ex quolibet hyperbolæ propoſitæ puncto T in vtrumque axem (ſi opus eſt)

pro-

productum demittantur perpendiculares TI, T$\beta$; ſitque curuam hyperbolicam normaliter ſecans in puncto T, recta G$\gamma$ vtrumque axem (ſi opus eſt) productum ſecans in punctis G, $\gamma$: producantur (ſi opus eſt) rectæ T$\beta$, TI, & rectam ZKY interſecent in Y & O punctis; manifeſtum eſt ex loco citato




Franciſ. a Schooten rectas $\beta$Y, $\beta\gamma$, eſſe æquales; eſt autem, vt $\beta\gamma$ ad $\beta$T ſeu EO, ita IT ſeu $\beta$Z ad IG; & ideo ut Y$\beta$ ad OE ita Z$\beta$ ad IG; ſed ut Y$\beta$ ad OE ita Z$\beta$ ad ZE ſeu IO; ſunt ergo æquales rectæ GI, IO. Producatur recta IT vt hyperbolæ inventæ occurrat in Q & eius aſymptoto in P, ſitque eius interſectio cum aſymptoto hyperbolæ propoſitæ punctum N. ex conſtructione quadratum rectæ HV (hoc eſt quadrata rectarum HL, Z$\alpha$) æquale eſt quadratis rectarum HR, HK, ſeu quadratis rectarum HM, HK, Z$\alpha$; & ideo idem vtrinque auferendo, relinquitur quadratum rectæ HL æquale quadratis rectarum HK, HM: cumque rectæ IP, IN, IO, ſint in eadem

ra-

ratione cum rectis HL, HM, HK; erit etiam quadratum rectæ IP æquale quadratis rectarum IN, IO; & idem quadratum Z α vtrinque addendo, erunt quadrata rectarum IP, Zα (hoc est quadratum rectæ IQ) æqualia quadratis rectarum IO, IN, Zα, hoc est quadratis rectarum IO, IT seu IG, IT, hoc est quadrato rectæ TG; sunt ergo æquales rectæ QI, TG; cumque hoc semper eueniat in omnibus punctis curuæ hyperbolicæ α TC, manifestum est ex huius 3 segmentum hyperbolicum FAαZ æquale esse superficiei trunci super curua hyperbolica αTC sectæ a plano per rectam FZ transeunte & in angulo semirecto cum base trunci inclinante; & igitur, cum quadratum rectæ X sit duplum superficiei trunci, erit X radius circuli æqualis superficiei genitę a rotatione curuę hyperbolicę αTC circa axem coniugatum ZF, quod demonstrandum erat.

25 huius.

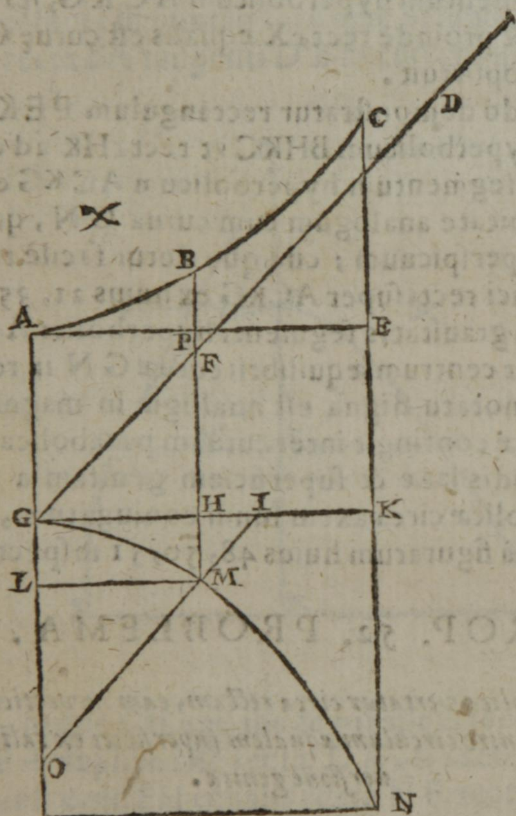
## PROP. 51. PROBLEMA.

*Inuenire rectam æqualem curuæ Parabolicæ.*

Sit curua parabolica GN, verticem habens G & axem GO, cui oportet rectam inuenire ęqualem. Producatur axis GO in A, vt GA fiat ęqualis semissi lateris recti, sitque GK recta parabolam tangens in vertice & NK axi parallella illi occurrens in K: deinde sit recta GD angulum rectum AGK bifariam diuidens, fiatque hyperbola AC verticem habens A, centrum G & asymptoton GD; producatur recta NK donec hyperbolam secet in puncto C, sitque AE rectę GK parallella: fiat tandem vt rectangulum AEKG ad segmentum hyperbolicum AGKC, ita recta GK ad rectam X; dico rectam X ęqualem esse curuę parabolicę GN. Ex quolibet curuę parabolicę puncto M demittantur in rectas GO, GK, perpendiculares ML, MH, sitque recta OI curuam parabolicam normaliter secans in puncto M, & rectis GO, GK, oc-

currens

currens in punctis O, I. Manifestum est rectam L O æqualem esse semissi lateris recti seu GA: producatur recta MH vt hyperbolam secet in puncto B & asymptoton GD in F; manifestum etiam est ob asymptoton G D quadratum rectę H B




ęquale esse quadratis rectarum A G, H F, vel ob angulos æquales HGF, HFG, quadratis rectarum LO, GH, seu LO, LM; sed quadratum rectæ O M æquale est quadratis rectarũ OL, LM; & ideo rectæ OM, HB sunt æquales. Deinde ob si-

militudinem triangulorum HMI, LOM, est vt HM ad MI ita OL ad OM, seu GA ad HB; cumque hoc semper fiat in omnibus punctis curuæ parabolicæ GN; erit ex huius 2 rectangulum AEKG ad segmentum hyperbolicum ACKG, vt recta GK ad curuam parabolicam GN; erat autem vt rectangulũ AEKG ad segmentum hyperbolicum ACKG, ita recta GK ad rectam X; & proinde recta X æqualis est curuę GN, quod demonstrare oportuit.

Eodem modo demonstratur rectangulum PEKH esse ad segmentum hyperbolicum BHKC vt recta HK ad curuam MN; & proinde segmentum hyperbolicum ACKG est magnitudine & grauitate analogum cum curua GN, quod etiam ex huius 2 est perspicuum; cumque detur facilè truncus inferior cylindrici recti super ACKG ex huius 21, 35 & 37 dabitur centrum grauitatis segmenti hyperbolici ACKG; & ideo innotescit centrum æquilibrii curuæ GN in recta GK: hinc quoque notatu digna est analogia in magnitudine & grauitate, quæ contingit inter curuam parabolicam, superficiem sphæroidis latæ & superficiem genitam a rotatione curuæ hyperbolicæ circa axem suum coniugatum, quæ euidens est ex sola figurarum huius 48, 50, 51 inspectione.

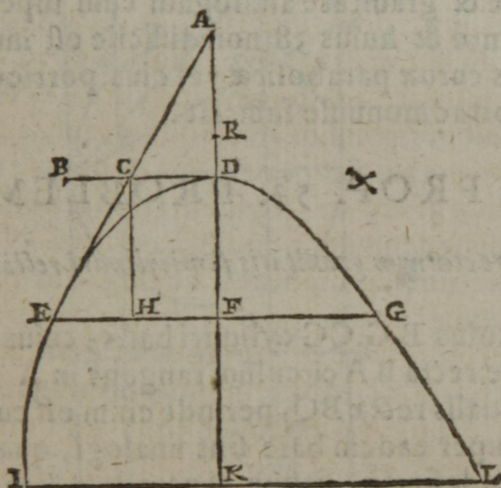
## PROP. 52. PROBLEMA.

*Si curua parabolica vertatur circa rectam, eam in vertice tangentem, inuenire circulum æqualem superficiei ex tali conuersione genitæ.*

SIt curua parabolica IED, cuius vertex D, rotata circa rectam BD eam in vertice tangentem, vt gignat superficiem rotundam: oportet huic superficiei inuenire circulũ æqualem. Sit curuæ parabolicæ latus rectum quadruplum rectæ DR, & eius axis DK. Ex puncto I in axem DK sit recta perpendicularis IK, & axe transuerso RD (cui etiam æqua-

lis

lis sit axis coniugatus ) fiat hyperbola DGL rectam IK productam secans in L: deinde semi hyperbolæ DKL fiat æquale quadratum, cuius diameter X: dico X esse radium circuli quæsiti. Ex quolibet curuæ parabolicæ puncto E in axem demittatur perpendicularis recta EF, quæ producta hyperbolam intersecet in puncto G; sitque parabolam tangens in puncto E recta EA tangenti DB occurrens in C & axi pro-




ducto in A, sitque CH æqualis & parallela rectę DF. Manifestum est FA duplam esse rectæ DA, & ideo EF est dupla rectæ CD, est ergo EH ęqualis rectæ HF. rectangulum RF in FD est æquale quadrato rectæ DF vna cum rectangulo RDF, atque rectangulum RDF æquale est quadrato EH quoniam RD est quarta pars lateris recti; & ideo quadratum rectæ CE (quod æquale est quadratis rectarum EH, HC = DF) æquale est rectangulo RF in FD, sed quadratum rectæ FG eidem rectangulo est æquale, & proinde rectę EC, FG, inter se sunt æquales, cumque hoc semper fiat, patet ex hu-

jus 4 semihyperbolam DKL esse æqualem superficiei trunci super curua parabolica DEI sectæ a plano per rectam DB transeunte & in angulo semirecto cum base trunci inclinante; & ideo, cum quadratum rectæ X sit duplum superficiei trunci, erit X radius circuli æqualis superficiei genitæ a ro-
25 huius. tatione curuæ parabolicæ circa rectam DB, quod demonstrandum erat.

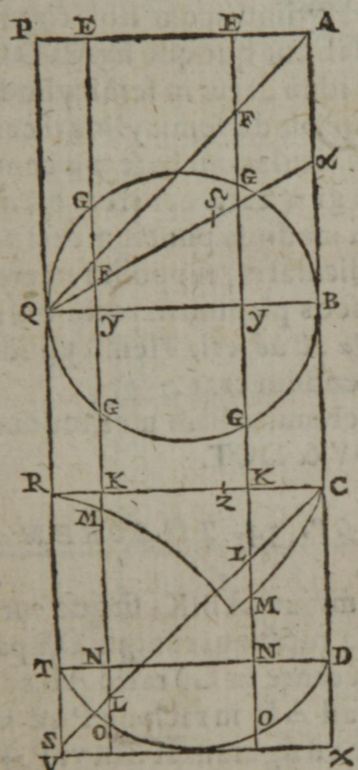
Ex hac propositione patet semihyperbolam DKL esse magnitudine & grauitate analogam cum superficiei: ex hac, antecedente & huius 38 non difficile est inuenire centrum grauitatis curuæ parabolicæ vel eius portionis cuiuscunque datæ, quod admonuisse sufficiat.

## PROP. 53. PROBLEMA.

*Inuenire centrum grauitatis semicylindri recti obliquè secti.*

SIt circulus BGQG cylindri basis, cuius diameter BQ, sitque recta BA circulum tangens in A semicylindri altitudo æqualis rectæ BQ, perinde enim est cum omnes semicylindri super eadem base sint analogi, quæ producatur ad partes B indefinitè, sitque ei parallela & indefinitè longa, recta PQ; fiant etiam AP, CR, DT, parallelæ diametro BQ, & ducatur AQ recta reliquis se habentibus vt in figura. Sit figura CRM talis naturæ, vt (ducta recta quacunque EYKM parallela rectæ PQ) EY sit ad FY vt GY ad KM: figura CRM est analoga magnitudine & grauitate semicylindro; atque huius figuræ seu semicylindri centrum æquilibrii ita inuenitur: sint CR, RS, æquales reliquis se habentibus vt in figura, fiatque figura DOT talis naturæ, vt (ducta recta quacunque EYKMNO) EY sit ad KL vt KM ad NO; & figuræ DOT circumscribatur rectangulum DV: sit deinde vt figura CRM ad figuram DOT ita EY seu RC ad CZ, manifestum est ex huius 37 Z esse centrum æquilibrii figuræ CMR: figura au-

tem D O T innotescit hoc modo: datur rectangulum DV, quoniam DT est æqualis BQ & DX seu TV est quarta continue proportionalium, quarum prima est EY & secunda dimidia rectę BQ; deinde NO est semper quarta continue pro-




portionalium, quarum prima est EY & secunda GY, quod sic probo: ex prædictis manifestæ sunt sequentes analogiæ.

$$EY : FY = QY :: GY : KM$$

$$EY : KL = BY :: KM . NO$$

$$EY^2 : BY \times YQ = GY^2 :: KM \times GY : KM \times NO$$

& ideo $EY^2 : GY^2 :: GY : NO$, est igitur

GY

$GY^3 =$ $EY^2 \times NO$; & proinde posita E Y prima & G Y secunda, erit N O quarta continue proportionalium, & ideo figura DOT est ad rectangulum DV, vt conois parabolica (cuius basis est circulus BGQG) ad cylindricum parabolicum illi conoidi circumscriptum, cumque dentur proportio conoidis parabolicæ ad cylindricum sibi circumscriptum & rectangulum D V, dabitur quoque figura D O T, & ideo punctum quoque Z; & ideo datur in semicylindri base eius centrum æquilibrii; & proinde semicylindri centrum grauitatis erit in data perpendiculari ad basem e centro æquilibrii excitata, atque idem gravitatis centrum est in recta Q $\alpha$ ducta inter punctũ Q & $\alpha$ medium punctum rectæ A B ex puncto B
29 huius, basi BGQ perpendicularis, supposita nempe cylindrum esse sectum a plano baseos planum in recta PQ secante; sit igitur vt RC ad CZ ita Q$\alpha$ ad $\alpha\delta$, erit $\delta$ semicylindri centrum grauitatis, quod inueniendum erat.

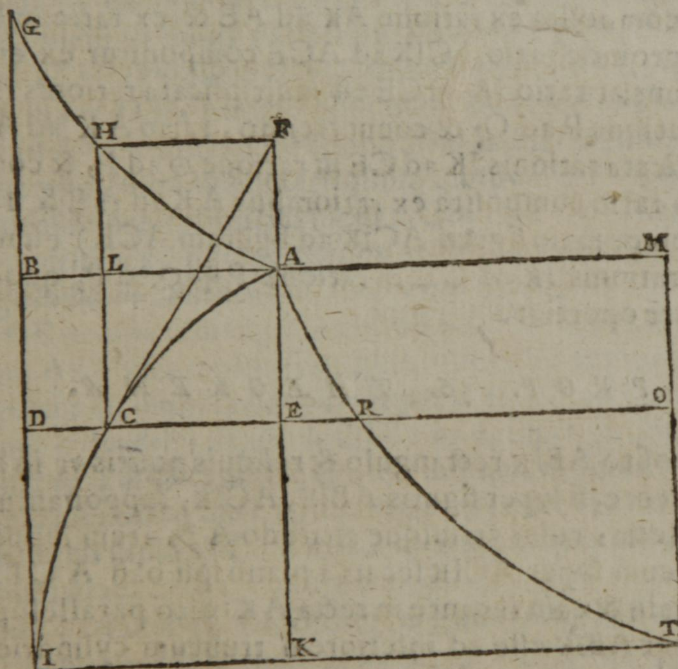
In huius 62 docebimus aliam methodum inueniendi proportionem inter DV & DOT.

## PROP. 54. THEOREMA.

Sit parallelogrammum ABIK, sitque curva ACI talis naturæ, vt (ducta recta quacunque DE parallela & æquali rectæ AB curvam secante in C) ratio AB ad EC sit multiplicata rationis A K ad A E in ratione P ad Q. dico parallelogramum ABIK esse ad figuram ACIK vt P + Q ad Q. producatur recta IB in G & iungatur curua A H G talis naturæ, vt (ducta recta CF tangente curuam A C I in quolibet puncto C & ductis parallelis EC, FH) recta C H sit æqualis & parallela rectæ EF: manifestum est ex huius 7 rectam AE ad FE, seu LC ad HC esse vt P ad Q; cumque hoc semper fiat, euidens est figuram ACIB esse ad figuram A C I G H vt P ad Q; atque ex huius 11 figura ACIGH est æqualis figuræ ACIK, & ideo figura ACIB est ad figuram ACIK vt P ad Q, & compo-

ponendo parallelogrammum ABIK est ad figuram ACIK vt P ✠ Q ad Q, quod demonstrandum erat.

Si P sit minor quam Q, erit ACIK quælibet ex parabolis infinitis, si vero P sit maior quam Q, erit ACIK quodlibet ex trilineis infinitis. Ex hac quoque propositione manifestum est parallelogrammum ABIK esse ad figuram ABIC vt P ✠ Q ad P; quod etiam ita innotescit, quoniam ratio AB ad EC




est multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ad Q, hoc est ratio AB ad AL est multiplicata rationis BI ad LC in eadem ratione P ad Q, erit conuertendo, BI ad LC multiplicata rationis AB ad AL in ratione Q ad P; & ideo ex ipsa propositione, parallelogrammum ABIK est ad figuram ABIC vt P ✠ Q ad P, quod demonstrandum erat.

PROP.

## PROP. 55. THEOREMA.

EIsdem positis, quæ in antecedente: dico rationem figuræ ACIK ad figuram ACE esse multiplicatam rationis IK ad CE in ratione P✠Q ad P. Ex antecedēte ABIK est ad ACIK, vt P✠Q ad Q, eodē modo ALCE est ad ACE vt P✠Q ad Q, & ideo ABIK est ad ACIK vt ALCE ad ACE, & permutando ABIK est ad ALCE vt ACIK ad ACE, at ratio ABIK ad ALCE est composita ex ratione AK ad AE & ex ratione IK ad CE, & proinde ratio ACIK ad ACE componitur ex eisdem rationibus; at ratio IK ad CE est multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ad Q, & conuertendo, ratio AK ad AE est multiplicata rationis IK ad CE in ratione Q ad P, & componendo, ratio composita ex rationibus AK ad AE & IK ad CE (nempe ratio figuræ ACIK ad figuram ACE) est multiplicata rationis IK ad CE in ratione P✠Q ad P, quod demonstrare oportuit.

## PROP. 56. THEOREMA.

SVpposito ABIK rectangulo & reliquis positis vt in antecedente, si super figuris ABIK, ACIK, supponantur cylindrici recti, cuius vtriusque altitudo AB, item supposito cylindricum super ACIK secari a plano ipsi basi ACIK seminormali, & eam secante in recta AK: dico parallelopipedum super ABIK esse ad inferiorem truncum cylindrici super ACIK vt 4P✠2Q ad Q. Supponatur planum secans cylindricum super ACIK produci ut secet etiam parallelopipedum, manifestum est truncum eius inferiorem esse prisma triangulare parallelopipedi dimidium. Deinde sit rectangulum AMTK cum inscripta linea ART talis proprietatis, vt (sumpto ad libitum puncto E & ducta recta DEO ipsi AK perpendiculari & lineas ART, ACI, secante in punctis R, C,

item

item ducto per puncto E plano ipsi AK normali & inferiores
cylindricorum truncos secante in triangulis rectangulis iso-
scelibus quorum bases sunt DE, CE) OE sit ad RE sicut
triangulum super DE ad triangulum super CE. Patet trian-
gulum super DE esse ad triangulum super CE seu OE ad RE
in duplicata ratione DE ad CE, atque ratio DE ad CE est
multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ad Q; & ideo
ratio OE ad RE est multiplicata rationis AK ad AE in ratio-
ne 2P ad Q, cumque hoc semper fiat vbicunque sumatur pũ-
ctum E, patet ex huius 54 rectangulum AMTK esse ad figu-
ram ARTK vt 2P+Q ad Q: at OE semper est ad RE, vt trian-
gulum super DE, nempe communis intersectio plani nor-
malis ad AK cum prismate triangulari, ad triangulum super
CE, nempe communem sectionem eiusdem prioris plani cũ
trunco inferiore cylindrici super ACIK; antecedentes quo-
que quantitates, nempe omnes rectæ OE inter se, & omnia
triangula super DE inter se, sunt æquales; & ideo vt omnes
rectæ OE nempe rectangulum AMTK ad omnes RE nempe
figuram ARTK ita omnia triangula super DE nempe prisma
triangulare ad omnia triangula super CE nempe inferiorem
truncum cylindrici super ACIK; & proinde prisma est ad
truncum vt 2P+Q ad Q, & ideo duplum prismatis nempe
parallelopipedum super ABIK est ad inferiorem truncum cy-
lindrici recti super ACIK vt 4P+2Q ad Q, quod demon-
strandum erat.

Atque ex huius 54 parallelopipedum super ABIK est ad
cylindricum eiusdem altitudinis super ACIK vt P+Q ad Q,
hoc est vt 4P+2Q ad $\frac{4PQ+2QQ}{P+Q}$, & proinde parallelopipe-
dum super ABIK est ad eiusdem cylindrici truncum supe-
riorem vt 4PP+6PQ+2QQ ad 3PQ+QQ; atque talis trũ-
cus superior idem est cum trunco eiusdem cylindrici inferio-
re resecto a plano basem secante seminormaliter in recta BI,
& ideo huius quoque trunci ad parallelopipedum patet ra-

tio, nempe vt 3PQ ✢ QQ ad 4PP ✢ 6PQ ✢ 2QQ.

*PROP. 57. THEOREMA.*

Posito parallelopipedo & cylindrico habere altitudinẽ AK & reliquis vt in antecedente; si cylindricus rectus super ACIK secetur a plano ad basem seminormali & eam secante in recta AB. Dico parallelopipedũ super ABIK esse ad inferiorem truncum cylindrici super ACIK in ratione P ✢ 2Q ad Q. Sit quadratum AMTK cum inscripta linea ART talis naturæ, vt (sumpto ad libitum puncto E & ducta recta DEO ipsi AK perpendiculari & lineam ART secante in puncto R, item ducto per punctum E plano ipsi AK normali, cuius intersectio cum trunco inferiore est rectangulum LAEC) AE sit ad RE sicut BA ad CE. Patet ex constructione rationem AE ad RE esse multiplicatam rationis AK ad AE in ratione P ad Q, & componendo, ratio AK ad RE, hoc est ratio KT ad RE, est multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ✢ Q ad Q; & ideo quadratum AMTK est ad figuram
25 Huius. ARTK vt P ✢ 2 Q ad Q, at vt ABIK ad AMTK ita IK vel AB ad TK seu AK, & ideo rectangulum ABIK est ad figuram ARTK in ratione composita ex ratione P ✢ 2Q ad Q & ex ratione AB ad AK. Quoniam AE est ad RE vt BA ad CE, erit rectangulum AE in CE nempe AECL æquale rectangulo AB in RE, cumque hoc semper fiat, erit cylindricus super ARTK habens altitudinem AB æquale inferiori trunco cylindrici super ACIK; & ideo parallelopipedum super ABIK cum altitudine AB est ad cylindricum super ARTK seu truncum inferiorem cylindrici super ACIK vt basis ABIK ad basem ARTK, hoc est in ratione composita ex ratione P ✢ 2 Q ad Q & ex ratione AB ad AK, at parallelopipedum super ABIK cum altitudine AB est ad parallelopipedũ super ABIK cũ altitudine AK vt AB ad AK; & proinde parallelopipedũ super ABIK cum altitudine AK est ad truncum inferiorem cylindrici su-

per

per ACIK vt P + 2 Q ad Q, quod demonstrandum erat.

Atque ex huius 54 parallelopipedum super ABIK est ad cylindricum eiusdem altitudinis super ACIK vt P + Q ad Q, hoc est vt P + 2 Q ad $\frac{QP + 2QQ}{P + Q}$; & ideo parallelopipedum super ABIK altitudinis AK est ad truncum superiorem cylindrici super ACIK eiusdem etiam altitudinis AK vt PP + 3 PQ + 2 QQ ad QQ; atque talis truncus superior idem est cum inferiore eiusdem cylindrici trunco resecto a plano basem seminormaliter secante in recta IK, & ideo eiusdem parallopipedi ad hunc truncum inferiorem eadem est ratio.

Ex huius 29, 56 & 57 manifestum est centrum æquilibrij figurę ACIK ita diuidere rectam IK, vt pars versus I sit ad partem versus K in ratione 3P + Q ad P + Q, item centrum æquilibrii eiusdem ACIK ita dividere AK, ut pars versus A sit ad partem versus K in ratione P + Q ad Q.

In duabus præcedentibus, etiamsi facilitatis gratia supponatur ABIK rectangulum, conclusiones tamen non minus veræ sunt de parallelogrammo quolibet; nullo enim negotio demonstrantur ex æqualitate & analogia in magnitudine & grauitate truncorum super rectangulis & eorum figuris cum truncis super parallelogrammis quibuscunque & eorum figuris; quod etiam in sequentibus de figuris longitudine infinitis intelligi velim.

## PROP. 58. PROBLEMA.

SIt AEF angulus rectus sitque curva ADF talis naturæ, vt (ducta recta DC ad libitum perpendiculari ad AE) ratio EF ad CD sit multiplicata rationis AE ad AC in ratione numeri imparis cuiuscunque ad numerum proxime minorem; oportet inuenire rectam æqualem curvæ ADF. v. g. sit ratio EF ad CD multiplicata rationis AE ad AC in ratione 5 ad 4; sitque (ope huius 2) ut recta AE ad curuam AF ita rectan-

gulum ad libitum AGNE ad mixtilineum AGLE, sitque latus rectum ( nempe recta ducta in quadratoquadratum rectæ CD semper efficiens surdesolidum rectæ AC) curvæ A F,

$l$; AG, $b$; GI, $c$; IL, $d$; GH quotlibet æqualiter crescentes $a$; HO vel CA; $z$; manifestū est ex huius 7 BC esse $\frac{4z}{5}$ & CD $\sqrt{qq}\,\frac{z^5}{l}$

2 huius. & BD $\sqrt{q}(\sqrt{q}\frac{z^5}{l} + \frac{16z^2}{25})$; erit igitur BC ad BD ut CK ad CO, hoc est $\frac{4z}{5} : \sqrt{q}(\sqrt{q}\frac{z^5}{l} + \frac{16z^2}{25}) :: b : b + a$; & ideo $\frac{4bz + 4az}{5} = \sqrt{q}(\sqrt{q}\frac{b^4z^5}{l} + \frac{16b^2z^2}{25})$, & equatione reducta inuenitur HO seu $z = \frac{1024lb^2a^2 + 512lba^3 + 256la^4}{625b^4}$; & ideo manifestum est analystæ trilineum GIL esse compositum ex additione trilineorum, quadratici, cubici & quadratoquadratici, quorum omnium axes sunt GI, & bases, trilinei quadratici

54 huius. $\frac{1024lb^2c^2}{625b^4}$, cubici $\frac{512lbc^3}{625b^4}$ & quadratoquadratici

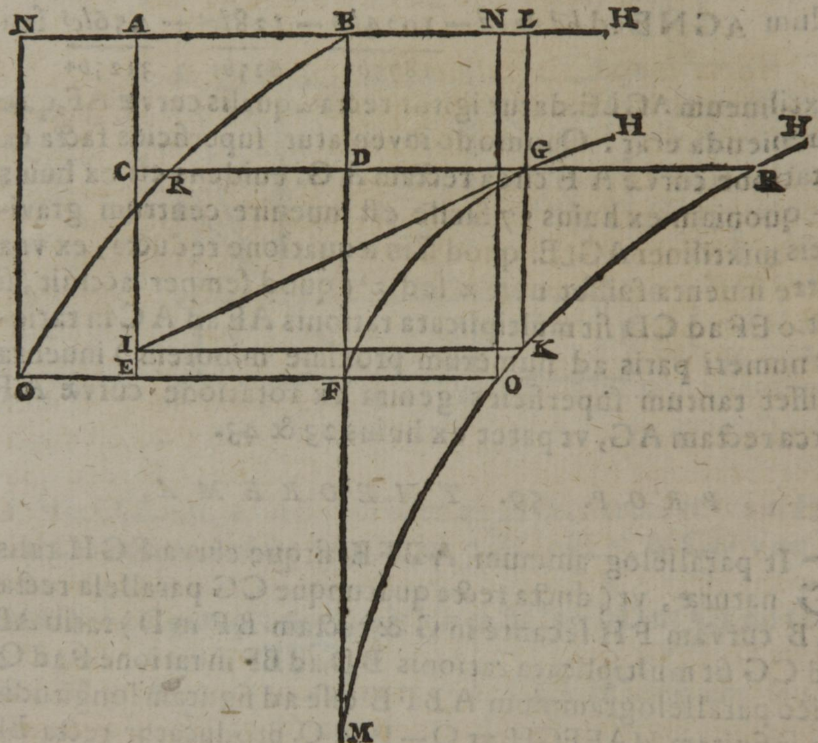
256$lc^4$;

$\frac{256lc^4}{625b^4}$; & proinde trilineum GOLI eſt $\frac{1024lc^3}{1875b^2} + \frac{128lc^4}{625b^3} + \frac{256lc^5}{3125b^4}$, & ideo recta AE eſt ad curuam AF vt $bd$ ſeu rectangulum AGNE ad $bd + cd - \frac{1024lc^3}{1875b^2} - \frac{128lc^4}{625b^3} - \frac{256lc^5}{3125b^4}$ ſeu mixtilineum AGLE, datur igitur recta æqualis curvæ AF, quæ inuenienda erat. Quomodo inveniatur ſuperficies facta ex rotatione curvæ A F circa rectam A G. euidens eſt ex huius 43. quoniam ex huius 57 facile eſt inuenire centrum gravitatis mixtilinei AGLE. quod ſi in æquatione reducta, ex vna parte inuenta fuiſſet non $z$ ſed $z^2$ (quod ſemper accidit, ſi ratio EF ad CD ſit multiplicata rationis AE ad A C in ratione numeri paris ad numerum proxime minorem) inuenta fuiſſet tantum ſuperficies genita ex rotatione curvæ A F circa rectam AG, vt patet ex huius 23 & 43.

## *PROP. 59. THEOREMA.*

SIt parallelogrammum A B F E, ſitque curva F G H talis naturæ, vt (ducta recta quacunque C G parallela rectæ A B curvam F H ſecante in G & rectam B F in D) ratio AB ad CG ſit multiplicata rationis B D ad BF in ratione P ad Q. dico parallelogrammum A B F E eſſe ad figuram longitudine infinitam HAEFGH vt Q — P ad Q. producatur recta BF in M & ducatur curva MKH talis naturæ, vt (ducta recta GI tangente curvam F G H in quolibet puncto G & ductis parallelis G C, KI) recta G K ſit æqualis & parallela rectæ C I: manifeſtum eſt ex huius 7 rectam AC ad CI vel L G ad GK eſſe vt P ad Q, cumque hoc ſemper fiat, euidens eſt figuram H F B H eſſe ad figuram H F M H ut P ad Q, atque ex huius 11 figura H F M H eſt æqualis figuræ H A E F H, & ideo figura H A E F H eſt ad figuram H F B H vt Q ad P, & per conuerſionem rationis, H A E F H eſt ad parallelogrammum

mum ABFE ut Q ad Q – P, & conuertendo ut parallelogrammum ABFE ad figuram HAEFH ita Q – P ad Q, quod demonstrandum erat.




PROP. 60. THEOREMA.

SVppoſito ABFE rectangulo & reliquis poſitis ſicut in antecedente; ſi ſuper figuris ABFE, HAEFH, ſupponantur cylindrici recti, cuius prioris altitudo AB, ſecundi autem altitudo infinita, item ſuppoſito cylindricum ſuper HAEFH ſecari a plano ipſi baſi ſeminormali & eam ſecante in recta AE: dico parallelopipedum ſuper ABFE eſſe ad inferiorem truncum cylindrici ſuper HAEFH vt 2Q – 4P

ad

ad Q. consideratis considerandis demonstratio non differt ab huius 56.

### PROP. 61. THEOREMA.

EIsdem suppositis cylindricis, qui in antecedente; sed cum altitudine B F, & supposito cylindricum super H AEFH secari a plano ipsi basi seminormali & eam secante in recta A H: dico parallelopipedum super A B F E esse ad inferiorem truncum cylindrici super HAEFH in ratione 2 Q—P ad Q. Sit primò P minor quam Q, sitque vt AB ad C G ita B D ad D R protractam versus A E, & compleatur quadratum NBFO ex parte A E, item ex omnibus punctis R imaginetur curua BRO: patet ex constructione rationem BD ad DR esse multiplicatam rationis B D ad B F in ratione P ad Q, & diuidendo, ratio DR ad B F, nempe ratio D R ad F O, est multiplicata rationis BD ad BF in ratione Q— P ad Q, & ideo quadratum NB F O est ad figuram B R O F in ratione 2 Q— P ad Q, at vt ABFE ad NBFO ita EF seu AB ad OF seu BF, & ideo rectangulum ABFE est ad figuram BROF in ratione composita ex ratione 2Q—P ad Q & ex ratione AB ad BF. Quoniam est vt AB ad CG ita BD ad D R, erit rectangulum A B in DR æquale rectangulo BD in CG, at rectangulum AB in DR est communis intersectio cylindrici recti super BROF altitudinem habentis A B cum plano secante super R D ad basem normali, & rectangulum B D in C G est intersectio eiusdem prioris plani producti cum trunco inferiore cylindrici super HAEFH; cumque hæ intersectiones semper contingant esse æquales, manifestum est inferiorem truncum cylindrici super HAEFH æqualem esse cylindrico super B R OF altitudinem habenti A B; & ideo parallelopipedum super A B F E cum altitudine AB est ad cylindricum super BROF seu truncum inferiorem cylindrici super HAEFH vt basis A B F E ad basem BROF, hoc est in ratione composita ex ratione 2Q—P

54 huius.

ad

ad Q & ex ratione AB ad BF, at parallelopipedum super AB FE cum altitudine AB est ad parallelopipedũ super eadẽ AB FE cum altitudine BF vt AB ad BF; & proinde parallelopipedum super ABFE cum altitudine BF est ad inferiorem truncum cylindrici super HAEFH vt 2Q — P ad Q, quod &c.

Quod si P sit maior quam Q; sit vt AB ad CG ita BD ad CR protractam versus LK, & compleatur quadratum NAEO ex parte LK, item ex omnibus punctis R imaginetur curua ORH: patet ex constructione rationem BD ad CR esse multiplicatam rationis BD ad BF in ratione P ad Q, & sumendo excessum antecedentis supra consequentem ad consequentem, ratio BF ad CR nempe ratio EO ad CR est multiplicata rationis BD ad BF seu AC ad AE in ratione P — Q ad Q; & ideo quadratum NAEO est ad figuram longitudine infinitam HAEOH vt 2Q — P ad Q, at vt ABFE ad NAEO ita EF seu AB ad EO seu BF, & ideo rectangulum ABFE est ad figuram HAEOH in ratione composita ex ratione 2Q — P ad Q, & ex ratione AB ad BF. quoniam est vt AB ad CG ita BD ad CR, erit rectangulum AB in CR æquale rectangulo BD in CG, at rectangulum AB in CR est communis intersectio cylindrici recti super HAEOH altitudinem habentis AB cũ plano secante super CR ad basem normali, & rectangulum BD in CG est intersectio eiusdem prioris plani cum trunco inferiore cylindrici super HAEFH; cumque hæ intersectiones semper contingant esse æquales, manifestum est inferiorem truncum cylindrici super HAEFH æqualem esse cylindrico super HAEOH altitudinem habenti AB, & ideo parallelopipedum super ABFE cum altitudine AB est ad cylindricum super HAEOH seu truncum inferiorem cylindrici super HAEFH ut basis ABFE ad basem HAEOH, hoc est in ratione composita ex ratione 2Q — P ad Q & ex ratione AB ad BF, at parallelopipedum super ABFE cum altitudine AB est ad parallelopipedum super eadem ABFE cum altitudine BF vt AB ad BF; & proinde parallelopipedum super ABFE cum

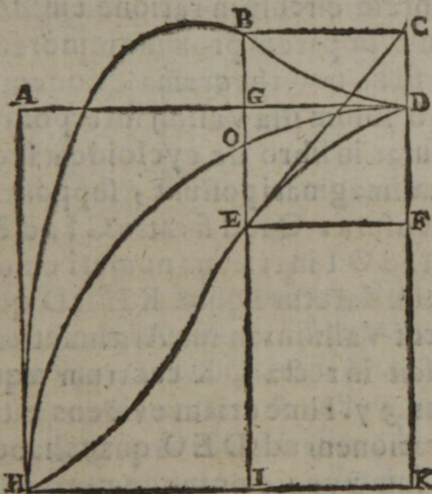
alti-

altitudine BF est ad inferiorem truncum cylindrici super HAEFH vt 2Q—P ad Q, quod demonstrare oportuit.

Ex his & huius 29, 37, non difficile est colligere centrum æquilibrii figuræ HAEFH ita assignari in recta AH, nempe AB esse ad distantiam centri ęquilibrii à puncto A vt 2Q—4P ad Q—P; item eiusdem figuræ centrum æquilibrii ita diuidere rectam AE ut pars versus A sit ad partem versus E in ratione Q—P ad Q.

### PROP. 62. THEOREMA.

SIt quadrans circuli KDOH & recta DA parallela radio HK, sitque curva DEH talis naturæ, vt (ducta recta quacunque GI parallela & æquali rectæ DK curvam circularem




secante in O & curvam DEH in E) ratio GI ad EI sit triplicata rationis GI ad OI. dico quadrantem circuli KDOH esse ad figuram KDEH vt 4 ad 3, hoc est, curvam DEH diuidere quadrantē circuli in ratione 3 ad 1. ducatur curva HBD talis

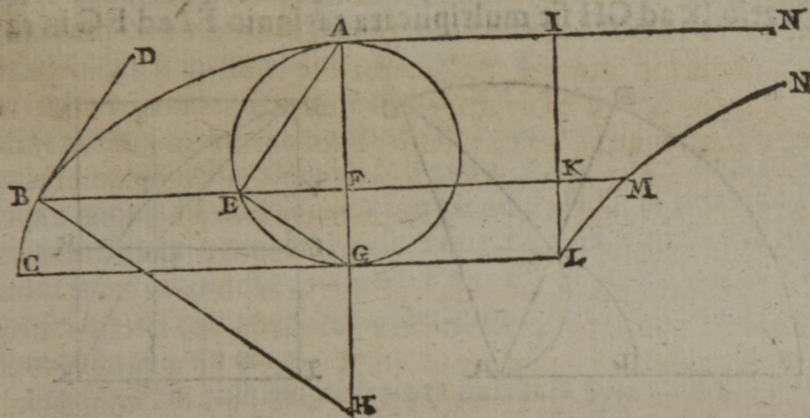
naturæ; vt (ducta recta EC tangente curvam HED in quolibet puncto E & ductis parallelis EF, BC) recta EB sit æqualis & parallela rectæ CF: manifestum est ex huius 7 rectam CF seu BE esse triplam rectæ EO, cumque hoc semper fiat, evidens est figuram HBDE esse triplam figuræ HODE, atque ex huius 11 figura HBDE est æqualis figura HEDK; & proinde figura HEDK est ad figuram HODE in ratione 3 ad 1, diuidit ergo curva HED quadrantem circuli in ratione 3 ad 1, quod demonstrare oportuit.

Quod si ratio GI ad EI esset quintuplicata rationis GI ad OI, curva HED quadrantem circuli diuideret in ratione 5 ad 3; si autem septuplicata, in ratione 7 ad 5; & sic in genere, si ratio GI ad EI sit multiplicata rationis GI ad OI in ratione cuiuscunque numeri imparis ad vnitatem, curva HED divides quadrantem circuli in ratione eiusdem numeri imparis ad numerum imparem proxime minorem, quæ omnia demonstrantur sicut hoc theorema. Eodem prorsus modo demonstratur nō solum illa Vallisij interpositio qua spatium cissoidale mensurat in libro de cycloide, sed etiam omnes fortassis aliæ quæ imaginari possunt, supposita primæ interpositæ figuræ mensura. Quod si ratio GI ad EI sit multiplicata rationis GI ad OI in ratione numeri cuiuscunque paris ad vnitatem, facile daretur figuræ KHED quadratura ope huius 54, ut docet Vallisius in sua Arithmetica infinitorum; & ideo innotescit in recta DK centrum æquilibrij figuræ DEHK ope huius 37. Hinc etiam evidens est DEF eandem semper habere rationem ad DEO quam habet DEHK ad DEHO, quod summopere notandum, nam (præter multa alia pulcherrima problemata) si secetur conois parabolica plano ad axem parallelo, ex data eiusdem ab axe distantia, dabitur huius ope utrumlibet conoidis segmentum.

PROP.

PROP. 63. THEOREMA.

Sit curvæ cycloidis primariæ ſemiſſis CBA, eius baſis CG, circulus genitor AEG baſem tangens in puncto G a diametro GA. dico curvam CBA duplam eſſe rectæ AG. ſit AILG quadratum, ſitque figura NAGLN talis naturæ, vt (ducta recta quacunque FM parallela rectæ AI) ratio AI vel AG ad FM ſit ſubduplicata rationis AF ad AG: manife-

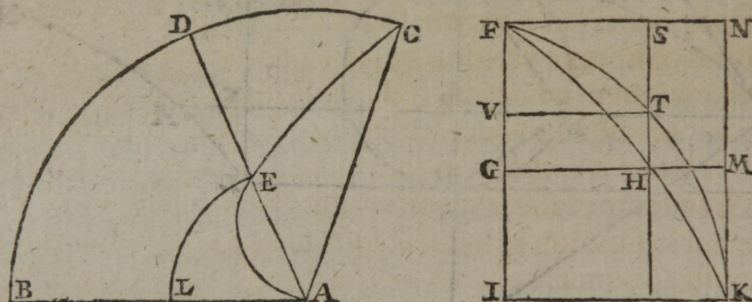



ſtum eſt ex huius 59 figuram infinitam NAGLN eſſe duplam quadrati AILG. per F diametri AG punctum quodlibet ducatur BM rectę AI parallela, cycloidi & curvæ LN occurrens in punctis B, M, ſecans circulum & rectam IL vt in figura; iungantur rectæ AE, EG, & illis parallelæ DB, BH: ex huius 8 patet BD tangere cycloidem in puncto B & BH contingenti eſſe perpendicularem. ut BF ad BH ita EF ad EG ſeu FA ad AE, atque ratio AF ad AG duplicata eſt rationis AF ad AE, & ideo ratio AF ad AG eſt duplicata rationis BF ad BH, ſed ratio AF ad AG eſt etiam duplicata rationis AG ad FM, & ideo ut BF ad BH ita AG vel FK ad FM, cumque ſemper ita ſit, patet ex huius 2 rectam AG eſſe ad curvam ABC in

ratione subdupla, nempe vt quadratum AILG ad figuram NAGLN, quod demonstrare oportuit.

### PROP. 64. THEOREMA.

SIt circuli sector CAB includens spiralem AEC talis naturæ, vt (ducta recta quacunque AE producta arcum secante in D) ratio AC ad AE sit multiplicata rationis CB ad DB in ratione P ad Q. sit angulus rectus FIK & curua FHK talis naturæ, vt (ducta recta quacunque GH parallela rectæ IK) ratio IK ad GH sit multiplicata rationis FI ad FG in ra-




tione P ad Q; patet ex huius 14 rectangulum FNKI figuræ FIK circumscriptum esse ad figuram FHKI vt arcus BC ad axem figuræ spiralis AEC evolutæ, & proinde ex huius 54 arcus BC est ad axem figuræ AEC evolutæ ut P✠Q ad Q. sit vt P✠Q ad Q ita arcus BC ad rectam FI, cui sit normalis recta IK æqualis rectæ AC, sitque figura FHKI talis naturæ, vt (ducta recta quacunque GH parallela rectę IK) ratio IK ad GH sit multiplicata rationis FI ad FG in ratione P ad P✠Q: dico figuram FHKI esse spatium spirale AEC evolutum. Ex rectæ FI quolibet puncto G sit rectæ FI normalis GH occurrens curvæ FHK in H, sitque rectæ GH æqualis AE producta in D. arcus BC est ad axem figuræ AEC euolutæ nempe FI

vt P+Q ad Q; eodemq; modo arcus EL est ad axem figuræ AE euolutæ ut P+Q ad Q; & ideo vt arcus BC ad rectam FI ita arcus LE ad axem figuræ AE euolutæ, & permutando, vt arcus BC ad arcum LE ita recta FI ad axem figuræ AE evolutæ, at ratio arcus BC ad arcum LE est composita ex ratione arcus BC ad BD & ex ratione arcus BD ad arcum LE seu rectę CA ad rectā EA, & ideo recta FI est ad axem figurę AE evolutę in ratione cōposita ex ratione arcus BC ad arcum BD & ex ratione rectæ CA ad rectam EA; sed ratio CA ad EA est multiplicata rationis BC ad BD in ratione P ad Q, & conuertendo, componendo & rursus conuertendo, ratio AC ad AE seu IK ad GH est multiplicata illius rationis (quæ componitur ex ratione arcus BC ad arcum BD & ex ratione rectæ CA ad rectam EA) nempe rationis rectæ FI ad axem figurę AE euolutæ in ratione P ad P+Q, sed ratio IK ad GH est multiplicata rationis FI ad FG in ratione P ad P+Q; & proinde FG est axis figuræ AE euolutæ, suntque EA, GH, æquales; & ideo (cum hoc semper fiat) manifestum est ex huius 14 & eius consectario figuram FHKI esse figuram AEC evolutam, quod demonstrandum erat.

Figura FHKI est illa descripta in huius 54, cumque poterit inveniri recta illam tangens in puncto dato ope huius 7, poterit quoque (ex consectario huius 18) recta duci spiralem AEC tangens in puncto dato: sæpissimè etiam (vt patet ex huius 58) inuenitur recta æqualis curvæ FHK, quæ etiam æqualis est spirali curvæ AEC.

Ope huius 15 vel 16 nullo negotio probatur sectorem BAC esse ad spatium spirale AEC ut 2P+Q ad Q.

## PROP. 65. THEOREMA.

SIt circuli sector CAB includens spiralem AEC talis naturæ, vt (ducta recta quacunque AE producta arcum secante in D) ratio DE ad BA sit multiplicata rationis CD ad

CB in ratione P ad Q. ſit FN ęqualis rectæ B A, item angulus rectus FNK & curva FK talis naturæ, vt (ducta recta quacunque HM parallela rectę FN) ratio HM ad FN ſit multiplicata rationis KM ad KN in ratione P ad Q. cōpleatur rectangulum FNKI producaturque MH in G; & ducatur recta D A, ita vt DE ſit æqualis rectæ HM, & ideo E A æqualis erit rectæ GH. Ratio D E ad BA ſeu HM ad FN eſt multiplicata rationis CD ad CB in ratione P ad Q, atque ratio HM ad F N eſt multiplicata rationis KM ad KN ſeu IG ad IF in eadem ratione P ad Q; & ideo ut CD ad CB ita IG ad IF, eſtque vt I K ad GH ita A C ad A E, & ideo (ex huius 14) vt rectangulum FK ad figuram FHKI, hoc eſt (ex huius 54) ut P+Q ad P ita arcus B C ad axem figuræ AEC evolutæ, qui ſit F I reliquis manentibus ut prius, ſitq; curva FTK talis naturæ, vt (ducta recta quacunq; STH parallela rectæ FI) IF ſit ad ST ut figura FHKI ad figuram FHG. Dico figuram FTKI eſſe ſpatium ſpirale AEC evolutum. Manifeſtum eſt conſtructione rectam FI eſſe axem figuræ A E C euolutæ; eodemque modo (vt prius oſtenſum eſt) demonſtratur rectangulum FH eſſe ad figuram inſcriptam FH G ut arcus L E ad axem figuræ A E euolutæ. Ratio FI ſeu axis figuræ AEC euolutæ ad axem figuræ A E evolutæ eſt compoſita, ex ratione rectæ F I ad arcum BC ſeu figuræ FHKI ad rectangulum ANKI, ex ratione arcus BC ad arcum B D ſeu rectæ IF ad rectam FG (quod ſic probo, vt CD ad C B ita I G ad IF, & diuidendo, & conuertendo, vt C B ad B D ita I F ad FG) ſeu rectanguli F N K I ad rectangulum FN M G, ex ratione arcus B D ad arcum L E ſeu rectę D A ad rectam E A nempe rectę GM ad rectam GH ſeu rectanguli F N M G ad rectangulum FSHG, & ex ratione arcus E L ad axem figuræ AE euolutę ſeu rectanguli F S H G ad figuram FHG; at patet rationem figurę F H K I ad figuram F H G componi ex eiſdem rationibus, & ideo vt FI ad axē figuræ AE evolutæ ita figura FHKI ad figuram F H G, hoc eſt vt F I ad ST vel FV, eſt igitur F V

axis

axis figuræ AE evolutæ, cumque ordinatim applicata VT sit æqualis rectæ AE, & hoc semper fiat vbicumque sumatur punctum E, manifestum est (ex consectario 14 huius) figuram FTKI esse spatium spirale AEC euolutum, quod demonstrare oportuit.

Ope huius 7 potest duci tangens ad curvam FTK, cum sit e numero earũ quas Cartesius appellat geometricas, & proinde potest per huius 2. comparari cum suo axe vel base, cui si reperiatur recta æqualis, erit eadem recta æqualis curvæ AEC; vt cunque potest semper duci recta tangens curvam AEC in puncto dato ope consectarii huius 18.

Ex huius 15 & 57 nullo negotio inuenitur sectorem BAC esse ad spatium spirale AEC ut $Q^2 + 3PQ + 2P^2$ ad $2P^2$.

Supposito telluris motu, linea descripta à graui descendente versus centrum terræ A esset CEA, si modo ratio P ad Q sit dupla; de qua magna orta est controuersia inter celeberrimos Mathematicos RR. PP. Stephanum de Angelis & Ioan. Baptistam Ricciolium, quæ fortasse dirimetur, si consideret doctissimus Ricciolius vires impulsuum esse in directa proportione cum velocitatibus, quibus appropinquat corpus mobile ad corpus resistens, abstrahendo ab omni alio motu; mihi enim nihil apparet evidentius; neque vllus est architecturæ militaris peritus, qui præcedens axioma non supponit in tractando de tormentis bellicis. Quod ad controuersiæ partem purè geometricam, existimo nullum nunc dubitare, quod graue cadens in centrum terrę tempore sex horarum semper sit extra semicirculum. Evidens est calculum R. P. Stephani de Angelis (dialogo primo pag. 19.) esse legitimum; demonstratio autem D. Manfredi (qua contrarium ostendere conatur pag. 17.) in hoc est erronea, quod tacitè supponat (ponendo CHA semicirculum) grauis descensum ad centrum terræ durare sex horas; nam centrum attingit (supponendo Riccioli observationes & terræ semidiametrum pedum 25870000) tempore minutorum 21 se-

cun-

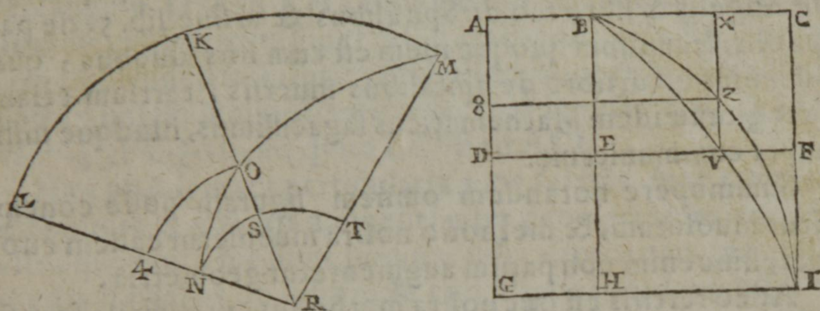
cundorum 53; neque in his vllius est momenti siue motus fiant ab intrinseco vel extrinseco, geometria enim & statica abstrahunt ab omni causa physica, quippe incerta & non euidente.

*PROP. 66. THEOREMA.*

SIt circuli sector LRM, eodemque centro arcus NT similis arcui LM, sitque spiralis NOM talis naturę, vt (ducta recta quacunque RSOK) ratio rectæ SO ad rectam TM sit multiplicata rationis arcus LK ad arcum LM in ratione P ad Q. sit BC æqualis rectæ MT, BH ad libitum, item angulus rectus CBH, & curva BVI talis naturæ, vt (ducta recta quacunque EV parallela rectæ BC) ratio EV ad BC sit multiplicata rationis BE ad BH in ratione P ad Q: compleatur rectangulum BCIH, & sit rectangulum ABHG cuius latus AB ęquale rectę TR: ex huius 54 patet rectangulum BCIH esse ad figuram BVIH vt P+Q ad Q; ducatur recta DEVF, ita vt EV sit ęqualis rectę OS, & ideo RO est ęqualis rectę DV. ratio EV ad HI seu OS ad MT est multiplicata rationis BE ad BH in ratione P ad Q, sed ratio OS ad TM est multiplicata rationis LK ad LM in eadem ratione P ad Q, & ideo vt BE ad BH ita LK ad LM, & ut DV ad GI ita RO ad RM, & ideo ex huius 14, ut ACIG ad ABVIG ita arcus LM ad axem figurę MONR euolutæ: sit vt ACIG ad ABVIG ita arcus LM ad rectam BH reliquis in figura ACIG se habētibus ut prius; sitque curva BZI talis naturæ, ut (ducta recta ad libitum XZV parallela rectę BH) figura ABVIG sit ad figuram ABVD vt recta BH ad rectam XZ vel A8. Dico figuram ABZIG esse spatium spirale RNOM evolutum. Manifestum est ex constructione rectam AG esse axem figuræ RNOM euolutæ; eodemque modo (ut prius ostensum est) demonstratur rectangulum AV esse ad figuram ABVD ut arcus 40 ad axem figuræ RNO euolutæ. Ratio AG seu axis figuræ RNOM euo-

lutæ

lutæ ad axem figuræ R N O evolutæ est cõposita, ex ratione axis figuræ RNOM evolutæ ad arcum LM seu figuræ AB VIG ad rectangulum ACIG, ex ratione arcus L M ad arcum LK seu rectæ I C ad rectam CF vel rectanguli ACIG ad rectangulum ACFD, ex ratione arcus LK ad arcum 4O seu rectæ KR ad rectam OR nempe D F ad D V vel rectanguli AC FD ad rectangulum AXVD, & ex ratione arcus 4O ad axem




figuræ RNO evolutæ seu rectanguli AXVD ad figuram AB VD; at perspicuum est rationem figuræ ABVIG ad figuram A B V D componi ex eisdem rationibus, & ideo ut figura ABVIG ad figuram ABVD seu vt A G ad A8 ita AG axis figuræ R N O M evolutæ ad axem figuræ R N O evolutæ, qui igitur est A8; cumque ordinatim applicata 8Z sit æqualis rectæ OR, & hoc semper fiat vbicunque sumatur punctum O, manifestum est ( ex Consectario 14 huius figuram A B Z I G esse figuram RNOM euolutam, quod demonstrare oportuit.

Curua BZI est ex earum numero quas Cartesius appellat geometricas, & igitur per huius 7 potest duci recta eam tangens in puncto dato, potest quoque comparari cum recta ope huius 2, & proinde curua quoque NOM illi æqualis, eique duci tangens in puncto dato.

Ex huius 15 & 56 non difficile erit demonstrare ( posita ratione HI ad HG vt P ad Y ) sectorem RLM esse ad figuram

RNOM vt P ad $\frac{Y^2}{P} + \frac{PQ}{2P+Q} + \frac{2PQY}{P^2+2PQ+Q^2}$.

Notandum demonstrationem 65 & 66 huius esse maximè vniuersalem, sed prælo currente non memini illam debito loco inserere.

Hic examinauimus tria spiralium genera; quorum primũ idem est cum illis duobus, quæ mensurauit R. P. Stephanus de Angelis in libro suo de Spiralibus & in fine lib. 5. de parabolis; secundum quoque idem est cum illis duobus, quæ dimensus est in libro de Spiralibus inuersis; tertium etiam excogitauit idem Mathematicus sagacissimus, illudque mihi nuper communicauit.

Summopere notandum omnem figuram posse concipi sicut inuolutam, & methodo nostra inuenietur eadem euoluta; hinc enim non parùm augmentetur geometria.

Adeo fertilis est hæc nostra methodus, vt difficile fere sit aliquid proponere illi omnino impervium; quod ut experiatnur, soluantur duo illa problemata quæ proposuit Renatus Franciscus Slusius in prop. 8. de infinitis hyperbolis R. P. Stephani de Angelis. Sit AB, $b$; BD, $a$; sitque secundum tenorem quæstionis, vt $b^2$ ad $ba - a^2$ ita $a^2$ ad $\frac{ba^3 - a^4}{b^2}$ quadratum rectæ DC, & ideo (ex huius 54) summa omnium quadratorum ab infinitis DC erit $\frac{b^3}{20}$, at summa totidẽ quadratorum rectæ AB est $b^3$; cum itaque hæ quadratorum summæ sint duplæ truncorum inferiorum, qui secantur in cylindricis rectis super ACB, AEFB, a plano basi seminormali, erit (ex huius 23) ut $b^3$ ad $\frac{b^3}{20}$ nempe vt 20 ad 1, ita cylindrus ex rotatione AEFB circa AB ad solidum rotundum ex rotatione ACB circa eandem AB. Sit secundum propositum vt in eiusdem de infinitis hyperbolis prop. 10. sitque ratio AB ad

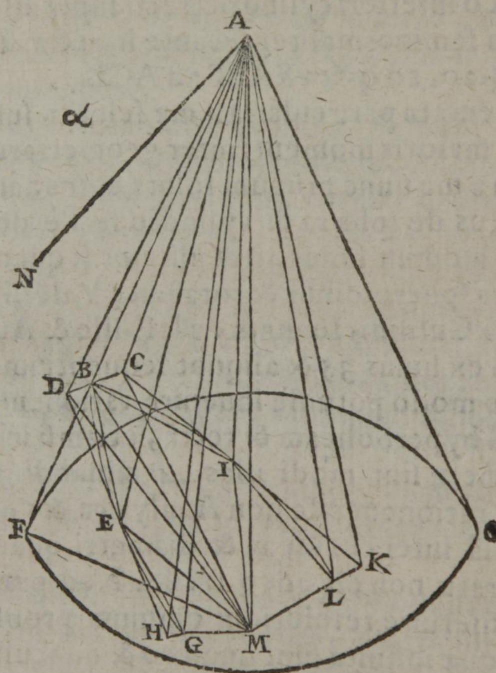
BD

BD multiplicatā rationis AD ad DC in ratione P ad Q: sitque ratio AB ad BD multiplicata rationis EA ad DO in ratione P ad Q, manifestum est EOB esse curuam in huius 54 descriptam; & ideo cubus ex latere EA vel AB est ad inferiorem truncum cylindrici recti super EOBA resecti à plano basem seminormaliter secante in recta EA ut $P^2 + 3PQ + 2Q^2$ ad $Q^2$; est autem vt EA ad DO ita ex positione AD vel KH ad DC; & ideo rectangulum EA in DC æquale est rectangulo DO in KH, cumque hoc semper fiat, manifestum est cylindricum super ACB (cuius altitudo EA) æqualem esse trunco inferiori cylindrici recti super EOBA resecti a plano basem seminormaliter secante in recta EA, & ideo vt $P^2 + 3PQ + 2q_2$ ad $q^2$ ita EABF ad ACB.

Hæc problemata particularia a me selecta sunt tanquam difficiliora & maioris momenti inter geometrarum inuenta, vltra quędam a me nunc primùm soluta; totus namque archimedis tractatus de sphæra & cylindro facilè demonstratur ex huius 3 ad modum huius 46 & aliquot sequentium; liber de conoidibus sphęroidibus & tota Lucę Valerii doctrina ex huius 21; tota Guldini, Ioannis de la Faille & Andreæ Tacquet doctrina ex huius 35 & aliquot sequentium: fateor tamen me nullo modo potuisse inuenire rationem inter curuā ellipticam vel hyperbolicam & rectā, etiamsi in hoc tractatulo multi diuersi sint modi illas examinandi; ita ut facilè credam hanc rationem esse non Analyticā & vno gradu esse superiorem illâ inter circulum & diametri quadratum, sed hoc demonstratu non est adeo facile. Non prætendo hanc methodum inseruire resolutioni omnium problematum irregularium, quæ infinita sunt numero & difficultate, qualia præsertim sunt illa de corporum & superficierum sectione irregulari a planis, vel aliis superficiebus, inter quæ tamen sequens exhibeo satis pulchrum, placet enim miscellanea quædam non prorsus inutilia hic adiungere.

## PROP. 67. THEOREMA.

SIt conus rectus AFO, cuius axis A M, qui secetur a duobus planis AML, AMG, quorum intersectiones cum coni superficie sint rectæ AL, AG; seceturque adhuc idem conus AFO a plano vtcunq; efficiente cum superficie coni communem sectionem GEBIL curuam; ita vt ab his sectionibus




excavetur a cono pyramis quædam conica ALMGEBI cuius vertex A & basis figura BIL MGEB contenta a tribus planis ALM, AMG, MGEBIL, & superficie conica AGEBIL; ex

axis

axis puncto M trium planorum communi sectione in latus coni AF sit perpendicularis recta MF. Dico pyramidem (cuius basis est planum æquale superficiei conicæ AGEBIL & altitudo MF) æqualem esse pyramidi conicæ ALMGEBI. Si dictæ pyramides non sint æquales, sit earum differentia $\alpha$: & pyramidi conicæ inscribatur pyramis AMGEBIL constãs ex pyramidibus triangularibus MGEA, MEBA, MBIA, MILA; eidem quoque pyramidi conicæ circumscribatur alia pyramis constans ex pyramidibus triangularibus MHDA, MDCA, MCKA, ita vt differentia pyramidis inscriptæ & circumscriptæ sit minor quam $\alpha$. Manifestum est pyramidis MHDA altitudinem esse MF, ex suppositione enim triangulum HDA conum tangit, & ideo normalis ex M ad HDA in rectã contactus seu latus coni normaliter cadit: eodem modo probatur MF esse altitudinem, ex vertice M, omnium reliquarum pyramidum triangularium, e quibus conflatur pyramis circumscripta, & ideo pyramis, cuius basis æqualis est omnibus triangulis AHD, ADC, ACK, & altitudo MF, æqualis est pyramidi circumscriptæ, & proinde maior pyramide conica, sed maior etiam est pyramide cuius basis est planum æquale superficiei conicæ AGEBIL & altitudo MF, quoniam eandem cum illa habens altitudinem, basem habet maiorem, quippe illi (dum conuexa existit) circumscriptã. Deinde pyramis triangularis MGEA (posita vertice M) minorem habet altitudinem quam MF, quoniam eius basis cadit intra superficiem coni, eodem modo omnes pyramides triãgulares pyramidem inscriptam componentes minorem habent altitudinem quam MF, & ideo pyramis (cuius altitudo MF & basis ęqualis basibus omnium pyramidum triangularium pyramidem inscriptam componentium) maior est pyramide inscripta, sed hæc pyramis minor est pyramide basem habente planum æquale superficiei conicæ AGEBIL & altitudinem MF, quoniam eandem habens altitudinem basem habet minorem, nempe illi dum conuexa existit in-

ſcriptam, & ideo pyramis inſcripta multo minor eſt eadem pyramide baſem habente planum æquale ſuperficiei conicę AGEBIL & altitudinem M F, ſed pyramis inſcripta etiam minor eſt pyramide conica; pyramis igitur inſcripta minor eſt pyramide conica & minor etiam pyramide conicam ſuperficiem baſem habente, pyramis verò circumſcripta utravis harum pyramidum demonſtrata eſt maior, & ideo maior eſt differētia inter pyramidem circumſcriptam & inſcriptam quam inter pyramidem conicam & pyramidem quæ ſuperficiem conicam pro baſe habet; ſed differentia inter pyramidem circumſcriptam & inſcriptam eſt minor quam $\alpha$, & proinde differentia inter pyramidem conicam & pyramidem (quæ ſuperficiem conicam pro baſe habet) eſt multo minor quam $\alpha$, quod eſt abſurdum, ponitur enim $\alpha$ differentia inter dictas pyramides; non ergo differunt pyramis conica AMGEBIL & pyramis cuius baſis eſt ſuperficies plana ęqualis conicæ ſuperficiei AGEBIL & altitudo recta MF, & ideo æquales ſunt, quod demonſtrandum erat.

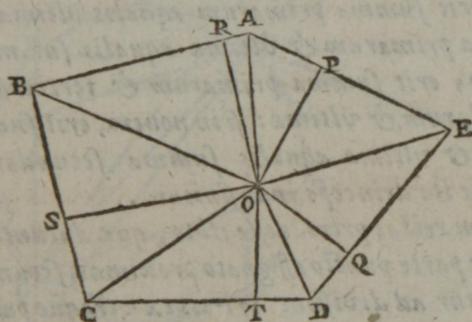
Ex vertice coni A in baſem pyramidis conicæ MGEBIL (ſi opus eſt) productam demittatur perpendicularis recta AN; manifeſtum eſt ex hoc Theoremate MF eſſe ad AN vt baſis pyramidis conicæ MGEBIL ad ſuperficiei conicæ portionem AGEBIL.

## *PROP. 68. THEOREMA.*

*Si in rectilineo quocunque æquilatero aſſignetur punctum, & ab illo puncto in omnia rectilinei latera demittantur perpendiculares rectæ; erit rectangulum ex ſemiſſe ſummæ perpendicularium & & perimetro rectilinei ad rectilineum, vt numerus laterum rectilinei ad vnitatem.*

SIt rectilineum æquilaterum ABCDE: à puncto O intra rectilineum demittantur in omnia rectilinei latera perpen-

pendiculares rectæ OR, OS, OT, OQ, OP. dico rectangulũ ex semissæ summæ perpendicularium & ambitu rectilinei esse ad rectilineum vt numerus laterum ad vnitatem. Ex puncto O diuidatur rectilineum in triangula AOB, BOC, COD, DOE, EOA, quorum triangulorum bases ex suppositione sunt inter se æquales. Triangulum AOB est æquale rectãgulo ex semisse perpendicularis OR & base AB, cumque omnia rectilinei latera sint æqualia rectæ AB, erit rectangulum ex semisse perpendicularis OR & ambitu rectilinei ad rectangulum ex semisse perpendicularis OR & recta AB seu triangulum AOB, vt numerus laterum rectilinei ad vnitatem, eodem modo in quolibet ex reliquis triangulis, vt rectangulum ex semisse perpendicularis ex trianguli vertice O in basem demissæ & ambitu rectilinei ad idem triangulum, ita nu-




merus laterum rectilinei ad vnitatem; cumque omnia triangula simul sint æqualia ipsi rectilineo, & omnia dicta rectangula sint æqualia rectangulo ex semissæ summæ perpendicularium & ambitu rectilinei; erit vt vna antecedentium nempe numerus laterum ad vnam consequentium nempe vnitatem, ita omnes antecedentes nempe rectangulum ex semisse summæ perpendicularium & ambitu rectilinei ad omnes

con-

consequentes nempe ipsum rectilineum, quod demonstrare oportuit.

## CONSECTARIVM.

HInc sequitur (si in rectilineo æquilatero quocunque assignentur duo puncta & ab eisdem ad omnia rectilinei latera ducantur perpendiculares) perpendiculares ab vno puncto demissas æquales esse perpendicularibus ex altero puncto demissis.

### *PROP. 69. THEOREMA.*

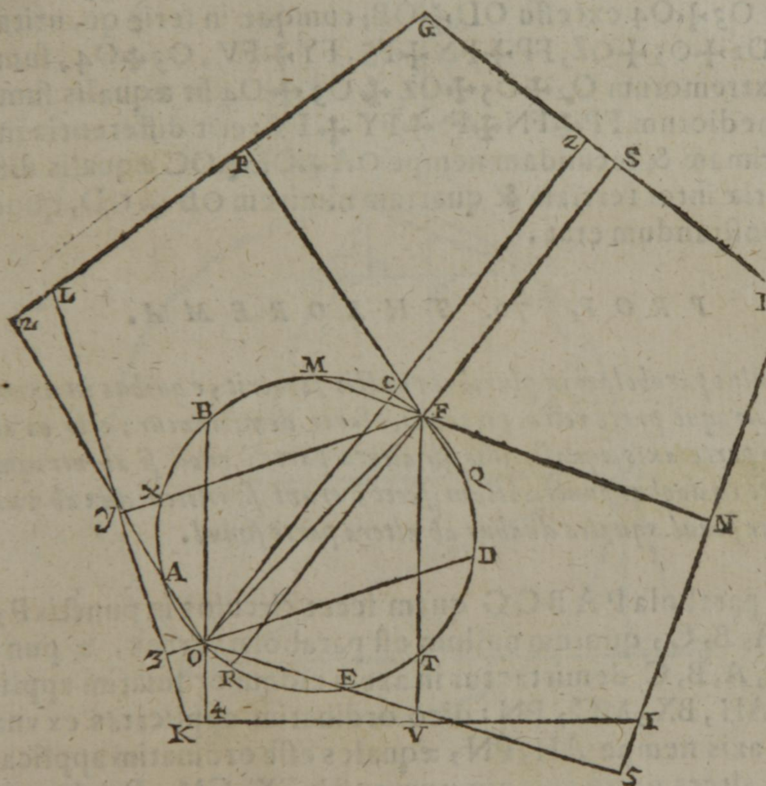
*Si circuli circumferentia diuidatur in partes quotcunque æquales & numero impares, & a quolibet peripheriæ pũcto ad omnes eiusdem divisiones rectæ ducantur: si circulus dividatur in tres partes æquales, erit summa primarum æqualis vltimæ; si in quinque, erit summa primarum & vltimæ æqualis summæ secundarum; si in septem, erit summa primarum & tertiarum æqualis summæ secundarum & vltimæ: si in nouem, erit summa primarum, tertiarum & vltimæ æqualis summa secundarum & quartarum; atque ita deinceps in infinitum.*

*Dicimus autem rectas primas esse illas, quæ ducuntur ad diuisiones ex vtraque parte puncto assignato proximas; secundas, illas rectas quæ ducuntur ad divisiones primis ex vtraque parte succedentes; tertias, quæ secundis succedunt, &c; rectam vero vltimam, illam quæ ducitur ad diuisionem à puncto assignato remotissimam.*

SIt circuli circumferentia ABCDE diuisa in partes quotcunque æquales in punctis A, B, C, D, E, sitq; O quodlibet punctum in circumferentia; à quo ad omnes diuisiones ducantur rectæ OA, OE, OB, OD, OC: dico summam primarum & vltimæ nempe OA + OE + OC esse æqualem summæ secundarum nempe OB + OD. Ex puncto O ducatur

cir-

circuli diameter O F, & per punctum F ducantur rectis O A, OB, OC, OD, OE, parallelæ QFP, FTV, RFS, FXY, MFN, & quoniam rectæ OA, OB, OC, OD, OE, efficiunt inter se angulos æquales, igitur rectæ QFP, FTV, RFS, FXY, MFN, efficiunt inter se etiam angulos æquales: centro igitur F de-




scribatur polygonum æquilaterum & æquiangulum GHI KL, cuius latera bifariam & ad angulos rectos secentur a rectis per F ductis; & proinde eadem latera normaliter secentur a rectis per O ductis, prioribus quippe parallelis, & ideo rectæ FP, FS, FN, FV, FY, sunt æquales rectis O2, OZ,

O5, O4, O3, ex antecedente; atque recta O2 superat rectam FP excessu AO, & recta O5 superat rectam FN excessu OE, & recta OZ superat rectam FS excessu CO; igitur rectæ O2 ✠O5✠OZ superant rectas FP✠FN ✠FS excessu AO ✠ OE ✠OC: recta quoque FY superat rectam O3 excessu OD, & recta FV superat rectam O4 excessu OB; & ideo FY✠FV superat O3✠O4 excessu OD✠OB; cumque in serie quantitatum O2✠O5✠OZ, FP✠FN✠FS, FY✠FV, O3✠O4, summa extremorum O2✠O5✠OZ ✠ O3 ✠ O4 sit æqualis summæ mediorum FP✠FN✠FS✠FY ✠ FV; erit differentia inter primam & secundam nempe OA✠OE✠OC æqualis differentiæ inter tertiam & quartam nimirum OB ✠ OD, quod demonstrandum erat.

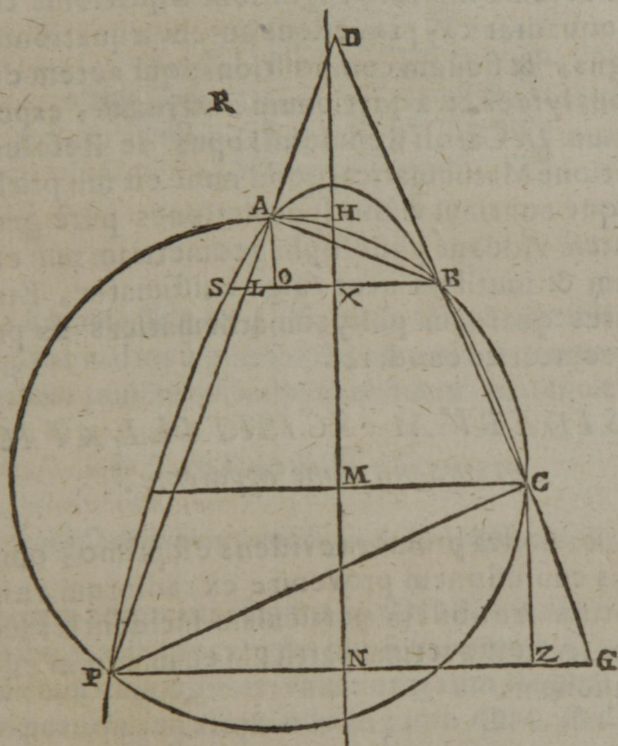
## *PROP. 70. THEOREMA.*

*Si circulus parabolam in pluribus punctis secuerit, e quibus in axem ex vtraque parte rectæ perpendiculares demittantur; erit ea ab vna parte axis æqualis illis ab altera parte: quod si ab utraque parte in duobus punctis illam secet; erunt similiter duæ ab vna parte simul æquales duabus ab altera parte simul.*

SIt parabola PABCG quam secet circulus in punctis P, A, B, C, quorum nullum est parabolæ vertex. a punctis P, A, B, C, demittantur in axem eidem ordinatim applicatæ AH, BX, MC, PN: dico ordinatim applicatas ex vna parte axis nempe AH, PN, æquales esse ordinatim applicatis ex altera parte axis nimirum rectis BX, CM. Producantur rectæ PA, BC, donec concurrant in D; eritque rectangulum BDC æquale rectangulo ADP, & igitur rectæ parabolam PABCG tangentes parallelæ rectis DC, DP, æquales erunt, quæ igitur se mutuo intersecent in parabolæ axe, facientes cum eidem ordinatim applicatis triangula isoscelia; & igitur DP, DC, illis parallelæ faciunt cum eisdem ordinatim

natim

natim applicatis triangula isoscelia nempe DLB, DGP; anguli ergo DBL, DPZ, sunt æquales, sed & anguli ABD, DPC, sunt æquales, & ideo anguli ABO, CPZ, sunt æquales, triangula igitur rectangula AOB, CZP, sunt similia, & proinde




OB: OA: : PZ: ZC
OB: OA: : R: SO
Sit R latus rectum parabolæ PZ: ZC: : R: SO
PZ: ZC: : R: ZG
R: SO: : R: ZG

Sunt igitur æquales SO, ZG, & proinde eadem est differentia inter AH primam & BX seu SX secundam, quæ inter

CM tertiam & PN seu G N quartam; & ideo summa primæ & quartæ AH ✠ PN est æqualis summæ secundæ & tertiæ BX ✠ MC, quod demonstrandum erat.

Alii sunt huius theorematis casus, sed in reliquis nulla restat difficultas, modo hic intelligatur.

Hoc theorema inseruit cognitioni æquationis cubicæ & quadratoquadraticæ, præcedens autem æquationibus amphibologiis, & sinuum compositioni; qui autem desiderat plenam analyseos & æquationum doctrinam, expectet absolutissimum D. Caroli Renaldinii opus de Resolutione & Compositione Mathematica, quod nunc est sub prælo.

Hucusque continuavimus speculationes purè geometricas; vt autem videant philosophi geometriam non esse adeo abstractam & inutilem sicut vulgo existimatur, sttatuimus difficultates quasdam phsiycomathematicas ex principiis opticis geometricè enodare.

## *DE SIDERVM SCINTILLATIONE & magnitudine apparente.*

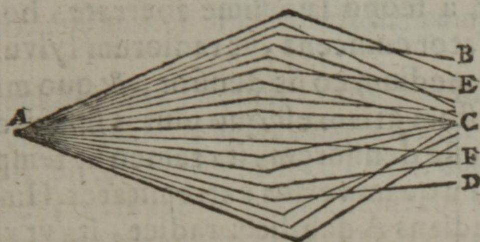
EX optica nostra promota evidens est primo, omnem visionis confusionem provenire ex radiorum vnius puncti in retinæ sensibilem particulam incidentia; secundo, quo maior fuerit ista retinæ particula eo maiorem esse visionis confusionem.

### PROPOSITIO I.

*Oculus humanus non potest esse Geometricè perfectus.*

SIt punctum aliquod radians A; si oculus humanus esset geometrice perfectus, congregaret omnes radios puncti radiantis A in pupillam incidentes in vnum retinet punctum geometricum nempe C: ut autem hoc fieret, oporteret vt oculus esset figuræ alicuius geometricæ, sed figuræ

guræ geometricæ in indiuisibili consistunt; & proinde in corporibus humanis, quæ quotidianis mutationibus sunt obnoxia, locum habere non possunt, ideoque oculus




cum talis figuræ esse non possit non est geometrice perfectus, & igitur radios à puncto A prouenientes non congregat in vnicum punctum C, sed in aliquam superficiem nempe BCD.

## PROPOSITIO 2.

*Propositum sit inquirere, quid efficiat hæc oculi imperfectio.*

POssumus commodissime naturam assimulare iaculatori perito, qui sagittas à puncto A in scopum C jaculatur; omnibus enim suis sagittis valde exiguum scopum C attingere non potest, sed aliquando in parva quadam distantia à scopo nempe in B sagittam omittit: vnde euenit ut post multas jaculatas sagittas, circiter scopi C punctum medium reperiantur sagittæ quam plurimæ sicut sylvula quædam densissima; at in paulo maiore distantia à scopo C nempe spatijs E, F, rarior omnino inuenitur ista sylvula; & in extremitatibus B, D, videtur rarissima: ita vt generaliter dici possit sylvulam quo magis ad C acceditur esse densiorem, & quo minus esse rariorem. Quod si adhuc multas alias jacu-

letur

letur sagittas, densior evadet hæc sylvula & versus medium & versus extremitates, sed semper quo magis acceditur ad C erit densior & quo minus rarior. Eodem modo natura radijs lucidis conatur punctum geometricum C attingere, sed ob suam imbecillitatem seu oculi imperfectionem cogitur à scopo sæpissime aberrare, hoc tamen sicut peritus iaculator euincens, vt radiorum sylvula quo magis acceditur ad medium eo sit densior, & quo minus eo sit rarior: manifestum etiam est quo plures sunt radii, radiorum sylvulam eo esse densiorem, ita tamen ut semper densior sit versus medium quam versus extremitates. Hinc colligimus, si punctum radians A debiliter radiet, ita vt vix percipiatur à sensu densior seu media pars sylvulæ C, reliquas sylvulæ partes rariores & minus illustratas non omnino percipi: quod si fortior sit radiatio, rariores etiam sylvulæ partes nempe E & F perceptibiles devenient, quoniam illustrantur sensibiliter ex suppositione: quod si fortissima sit radiatio, rarissima etiam & extimæ partes, nempe B, D, sensibiles fient: ita vt generaliter dici possit, quò fortior sit radiatio eo maiorem apparere sensui communi syvulam radiorum, seu particulam retinæ ab unius puncti radiis depictam.

## PROPOSITIO 3.

*Quo lucidius est obiectum, eo confusior est eius visio.*

QVo lucidius est obiectum, eo fortior fit radiatio vnius eius puncti radiantis nempe A; & quo fortior fuerit radiatio, eo maior apparet sensui communi pars retinæ à radiis puncti A illustrata, per huius 2; & proinde per 2 petitionem maior apparet visionis confusio: cumque hoc eodem modo demonstrari possit de omnibus obiecti punctis, manifestum est propositum. Quod si pars retinæ ab vnius puncti radius illustrata sit minimum sensibile, distinctissimè videtur obiec-

obiectum & nulla apparet confusio, vt ex prima huius petitione necessario sequitur.

## PROPOSITIO 4.

*Eiusdem obiecti confusior est visio in tenebris, quam in luce.*

IN tenebris oculi retina a multis radiis non illustratur, & ideo levis illa illustratio versus extremitates superficiei BD facilius percipitur quam in luce, cum exilis illa illustratio à fortissimis lucis radijs plane deleatur: & proinde cum retinæ pars ab vnius puncti radiis illustrata maior videatur in tenebris quam in luce, maior erit (per 2 huius petitionem) visionis confusio in tenebris quam in luce, quod est propositum. Alia etiam ratio esse potest, quod in tenebris maxime dilatetur oculi pupilla, & ideo maior est obiecti in retinam radiatio; & proinde per huius 3 maior etiam visionis confusio. Tertia ratio est, quod in magna pupillæ dilatatione plurimi sint radii extrauagantes, vnde confusa etiam oritur visio.

## PROPOSITIO 5.

*Quo confusior est obiecti visio, eo maior est obiecti magnitudo apparens.*

SIt visibile MN, oculi retina AH; supponatur in retina AH depingi confusam imaginem visibilis MN, ita vt radii puncti extremi M incidant in retinæ superficiem FG, & radii extremi visibilis puncti N in retinæ superficiem BC; manifestum est magnitudinem visibilis apparentem iudicari secundum quantitatem retinæ BG a radiis totius visibilis illustratæ: quod si cæteris paribus fiet maior imaginis confusio in retina depictæ, radii puncti M non solum incident in superficiem FG, sed in superficiem EH, superficiem FG seu

ſylvulæ medium vndique cingentem; & radii puncti N non ſolum incident in ſuperficiem B C, ſed in maiorem BC vndique cingentem, nempe AD: & in hac viſione, manifeſtum eſt magnitudinem viſibilis apparentem iudicari ſecundum quantitatem ſuperficiei AH a radiis viſibilis illuſtratæ; eſt autem ſuperficies AH maior ſuperficie BG; & proinde obiectum apparet maius in maiore confuſione quam in minore, quod demonſtrare oportuit.




Atque hæc eſt ratio quod corporum cæleſtium diametri maiores appareant, quando ſunt magis lucida, quam quando ſunt minus lucida; in huius enim tertia demonſtratum eſt obiecta magis lucida (cæteris paribus) magis confuſa videri quam obiecta minus lucida, & nunc demonſtratur obiecta magis confuſa maiora videri (cęteris paribus) quam minus confuſa; & igitur obiecta lucida (cæteris paribus) maiora videntur quã minus lucida. Ex huius etiam 5 demõſtrari poteſt, quod (cęteris paribus) obiecta minora in maiore proportione à confuſione augmentari videantur quam maiora: Sive enim obiectum ſit parvum ſive magnum, ęquale ſemper à confuſione recipit incrementum, at ęquale ad minus maiorem habet proportionem quam ad maius; & proinde ſi obiectum ſit parvum, augmentatur a confuſione in maiore

iore proportione quam si esset magnum. ex his concurrentibus causis patet ratio cur Stellæ fixæ videantur, etiamsi in tam vasta distantia sint omnino insensibiles: ob validam enim earum radiationem & in tenebris visionem, confusissime ab oculo videntur, & ob insignem earum paruitatem in maiore proportione ab hac confusione augmentantur, quam si essent maiores; ita vt decies millies forte & amplius maiores appareant, quam in tali distantia videri debent; nullius enim telescopii ope in hunc vsque diem distinctæ & terminatæ videri possunt. ob easdem rationes parua candela in tenebris e longissimo interuallo videri potest magnitudinis satis considerabilis, & sideris instar scintillans. Ex prædictis manifesta fit causa, quare scintillent sidera, aliquibus primo consideratis: primo scintillationem esse obiecti lucidi confusam & tremulam seu mutabilem visionem, aliquando enim videtur obiectum maius, aliquando minus, aliquando lucidius versus vnam partem, aliquando versus aliam: secundo eius causam esse mutationem aliquam seu tremorem in medio, tales enim omnino videmus effectus, cum inter oculum & visibile eleuantur vapores vel exhalationes, cuius ratio in optica versatum non potest latere: tertio notandum est, quod natura dum confusam percipit visionem humores oculi stimulet ad motum seu mutationem aliquam, vt confusioni perceptæ medeatur; cumque natura seu sensus communis distinctam sentit visionem, oculus suos humores a motu impedit, hoc enim rationi, experientiæ, & authoritati est consentaneum. Quod si sensus communis distinctam visionem sentire non potest, dico oculi humores agitari & toto visionis tempore non quiescere; hoc probari potest ex magna lassitudine, quam patitur oculus ex confusa visione; neque existimo esse rationi consentaneum, ut sisteret motus, dum adhuc viget eius causa, nempe confusio percepta. hisce prælibatis, dico scintillationem siderum provenire ex hac humorum mutatione, dum frustra conatur oculus distin-

ctam reddere eorum visionem, motus enim humorum eundem cum motu medii potest exhibere effectum, ut facillime demonstrari potest; probatur; sidera sunt obiecta quæ secundum hactenus demonstrata confusissime videntur, sed visio confusa oculi humores stimulat ad motum, ergo in visione siderum humores oculi mouentur; at ex humorum motu, aliquando videbuntur sidera maiora, aliquando minora, aliquando magis lucida, aliquando minus lucida, aliquando vnius figuræ, aliquando alterius, sed hæc tremula & inconstans visio est scintillatio, & igitur sidera scintillant. ratio etiam evidens est cur Stellæ fixæ magis scintillent, quam alia obiecta; in Stellis enim fixis confusio est adeo notabilis, vt illius ope decies millies maiores videantur quam reuera sunt; quid ergo mirum si confusionum mutatio seu scintillatio in illis sit maxima. Sed contra hanc doctrinam obiiciet forte aliquis, a telescopiis male elaboratis maximam fieri visionis confusionem, sed non maximam scintillationem; respondeo istam confusionem, cum non fiat ab ipso oculo, ab humorum motu vix sensibiliter mutari, & proinde istam scintillationem non esse valde sensibilem; quoniam scintillatio nil aliud est nisi confusionis mutatio, obiicient fortasse adhuc illos qui oculi vitio laborant maximam percipere visionis confusionem, sed plerumque paruam vel nullam scintillationem; respondeo oculi vitium maxime ordinarium esse humorum immobilitatem, & sine humorum vel medii motu nulla potest fieri scintillatio.

## *QVOD SOL SIT REALITER, ET FORmaliter calidus.*

HAec propositio facile potest deduci ex nostris opticæ promotæ demonstrationibus; sed in hoc loco magis accurate & geometricè hanc ipsam probabimus.

PRO-

# PROBLEMA.

*Ex combustione speculi vel lentis ustorij obseruata; distantiam à Sole invenire, in qua sol suis radijs directis eodem prorsus modo comburit, quo hic comburit speculum vel lens ustorium datum.*

Sit sol BCF, cuius centrum A, speculum vel lens vstorium datum INKO omnes radios solares in se incidentes in circulum MPLQ reducens, & in illo combustionem accendens. Supponimus speculum vel lentē INKO esse circulare, cuius axis ad cētrum solis vergit, & proinde conum AIOKN esse rectum. Sit ut IK diameter lentis vel speculi ad LM diametrum circuli combustionis, ita KA vel IA distantia speculi a centro solis ad DA. Dico DA esse distantiam quæsitam, hoc est, solem eodem modo comburere in distantia DA, quo comburit lens vel speculum IOKN in circulo MPLQ.

Per ſpeculi vel lentis IOKN extremitatem, ex centro A fiat ſphęra IONKH; item per punctum D ex eodem centro A fiat ſphęra ERDSG, cuius ſuperficiei portio a coni AIOKN ſuperficie comprehenſa, ſit RESD. Quoniam ſol ex omni parte æqualiter radiat, facile eſt deducere ex 6 definitione 5 elementorũ omnes radios ſolares eſſe ad radios in ſpeculũ vel lentem IOKN incidentes, ut integra ſuperficies ſphęrica ad eius portionem IOKN: ſed ex archimede de ſphęra & cylindro, integra ſuperficies ſphærica eſt ad eius portionem IOKN, vt quadratum diametri ad quadratum chordæ ſemiſſis arcus IK; & proinde omnes radii ſolares ſunt ad radios in ſpeculum vel lentem IOKN incidentes, hoc eſt radios in circulum MPLQ congregatos, ut quadratum diametri ad quadratum chordæ ſemiſſis arcus IK. Eodem modo probatur omnes radios ſolares eſſe ad radios in circulum DRES incidentes, ut quadratum diametri ad quadratum chordæ ſemiſſis arcus DE. ſed quoniam arcus IK, DE, ſunt ſimiles, quadratum diametri circuli IKH eandem habent rationẽ ad quadratum chordæ ſemiſſis arcus KI, quam habet quadratum diametri circuli EDG ad quadratum chordæ ſemiſſis arcus ED; & ideo omnes radii ſolares eandem habẽt rationem ad radios congregatos in circulo LPMQ, quam habent iidem omnes radii ſolares ad radios congregatos in circulo RESD; ſunt igitur radii congregati in circulo LPMQ æquales radiis congregatis in circulo DSER. Deinde ex conſtructione KI eſt ad LM ut KA ad DA; & ob ſimilitudinem triangulorum KAI, DAE; KA eſt ad DA vt KI ad DE; & ideo LM, DE, ſunt æquales; & igitur circuli LPMQ, DSER, ſunt æquales: atque æquales radii in æqualibus ſpatiis eundem producunt effectum; & proinde combuſtio in circulo DRES æqualis eſt combuſtioni in circulo LPMQ, quod demonſtrandum erat.

CON-

## CONSECTARIVM.

ATque ratione & experientia constat, quod, eadem speculi vel lentis diametro IK manente, quo minor fuerit circulus combustionis LPMQ, eo maior sit combustionis violentia, nempe (ut nos alibi demonstramus) in circulorum combustionis ratione reciproca: & quo minor est circulus combustionis LPMQ vel illi æqualis DSER, eo brevior est recta DA, seu puncti D à sole distantia, & e contra: ideoque quo propius accedit circulus DSER ad solem, eo maior in circulo est calor, seu combustio; & igitur Sol non est solum virtualiter, sed etiam formaliter calidus, quod demonstrandum suscepi.

## DE SOLIS HVMILIS ET SVBLIMIS *magnitudine apparente.*

ADmirantur nonnulli Solem humilem maiorem apparere etiamsi instrumento astronomico observatus, e contra minor sit eius diameter apparens: quare minor plerumque sit eius diameter apparens prope horizontem quam in loco cœli elevatiore causa in promptu est, quę à nullo astronomo ignoratur, nempe refractio quæ maior est inferioris limbi quam superioris; sed quare tunc nobis maior appareat conabimur hic explicare. Primo itaque sciendum est sensum communem iudicare de visibilis magnitudine, sicuti faciunt geometræ, nempe ex cognitis distantia & angulo visorio, & ideo quo maiorem percipit sensus communis visibilis distantiam, eo cæteris paribus maiorem iudicat visibilis magnitudinem; sed dum Sol existit prope horizontem, iudicat sensus communis maiorem esse solis distantiam quam in loco Cœli elevatiore ob multa corpora interiecta; & ideo prope horizontem iudicat etiam eius magnitudinem ma-

maiorem quam alibi, vbi corpora interiecta non videntur, & proinde de eius magna distantia iudicare non potest. Aliquando tamen ob nubes conuexas inter nos & solem interiectas apparet Sol etiam instrumento observatus, multo maior quam ordinario videtur, atque hoc euenit etiam quando Sol est sublimis, sed sæpius quando est humilis ob maiorem nubium frequentium. quæ hic diximus de Sole eodem modo intelliguntur de reliquis corporibus cælestibus.

## *DE VISIBILIVM PICTVRA sub tecto obscuro.*

INtellectis illis quæ demonstrauimus de imaginis natura & loco, facile est percipere, quare pingantur visibilia illustrata in albis obscurati tecti parietibus, si pateat exiguum aliquod foramen in tecto obscurato radiis visibilium liberum præbens transitum. Vnumquodque enim visibilis punctum dirigit conum radiosum intra tectum obscuratum, cuius coni vertex est visibilis punctum, & basis foramen illud exiguum, qui conus producitur vsque ad album & impolitum parietis planum, illic aliam coni radiosi basem describens, à qua illi radii, ob plani inæqualitatem, vndique reflectuntur; cumque hæc coni radiosi in pariete basis oculo appareat sicut punctũ opticum ob foraminis paruitatem, videbuntur omnes radii singulorum visibilis punctorum tectum ingressi a singulis parietis punctis diuergi; cumque hęc sit ipsa imaginis definitio, manifestum est in pariete esse visibilium imagines. Quod si foramen illud sit nimis largum, videtur imago illa confusa, quoniam radii singulorum visibilis punctorum non a punctis parietis opticis, sed a superficiebus sensibilibus diuerguntur. eodem modo si visibile foramen nimis appropinquet, conus productus basem describet in pariete non punctum opticum sed superficiem sensibilem; & ideo imago videtur confusa: idem etiam dicen-

dum

dum esset si paries recederet a foramine. quæ hic loquutus sum de pariete, eodem modo intelligenda sunt de quocunque plano albo & impolito.

## DE COMETARVM CAVDIS.

EXistimo plerosque huius seculi philosophos in hoc convenire, quod cometarum materia sit corpus aliquod humidum ex vaporibus & exhalationibus terræ vel alicuius corporis cęlestis genitum; quare autem luceant eorum caudæ omnino controvertitur: existimo tamen hanc opinionem esse maxime receptam, nempe, quod radii solis per refractionem in cometes corpore post eius transitum vniti, caudæ lucentis efficiant similitudinem; cui opinioni non subscribo ob hanc præcipue rationē demōstrativam: omnis lucis vel coloris apparentia provenit à reflectione, sed hic nulla est reflectio, ergo; probatur minor, si hic esset aliqua reflectio, esset reflectio radiorum ex cometæ corpore emersorum ab ipso æthere, sed ab æthere nulla potest fieri reflectio, ergo; probatur minor, æther omnibus consentientibus est corpus maxime diaphanum (hoc est) radiis omnibus a reflectione liberum præbens transitum. Hac igitur funditus eversa, novam stabiliamus sententiam: sed primo animaduertendum est solis absentiam in corporibus præsertim humidis & vaporosis crassas & opacas causari exhalationes, quas sua præsentia omnino dispellit: hoc enim nobis terræ incolis est notissimum; nam tempore nocturno crassus ille aer ab omnibus sentitur, & minus validis præcipue aeri sereno assuetis sæpissime mortaliter nocet: at in zona frigida ob raram solis præsentiam ita sensibiliter incrassescit aer, vt sępissime illic obseruetur refractio horizontalis 4 vel 5 graduum, sicut a nautis batavis commemoratur. deinde considerandum est cometas ex omnium fere consensu esse corpora humida & maxime vaporosa, ex nebulis, fumis vel

ex-

exhalationibus genita, (vel fortaſſe corpus quodam humidum proprios ſuos vapores emittens & æthera ſemper perrerans abſque vllo motu circa axem) & ad ſolem eundem ſemper fere ſitum retinentia: hiſce poſitis neceſſario ſequitur medietatem cometæ ſoli adverſam & ab illo nunquam calefactam nec illuſtratam craſſis & valde opacis infeſtari vaporibus, qui a vaporoſa illa cometæ materia & à ſe mutuo continuo nutriti, nulla vnquam (ob debilem & obliquam Solis lucem) facta ipſorum reſolutione, in immenſam altitudinem excreſcunt, & ſolis radios non ſatis validos ad exalationes diſpellendas vndique reflectunt. in hac hypotheſi iſtæ exhalationes à radiis Solis illuſtratæ in longum extenſæ apparent ſicuti cauda ſoli ſemper oppoſita, ſed ob irregularem vaporum ex cometa elevationem, aliquando curvata, & aliquando in vnam, aliquando in alteram cęli plagam deflectens: ſicuti eodem fortaſſe modo appareret in omnibus planetis, ſi omnes ſuas partes ad Solem viciſſim vertendo, vapores vndique non diſpellerentur a validis & directe incidentibus Solis radiis.

*Luna exiſtente plena; illuſtratio terræ à Sole ad illuſtrationem terræ a Luna, eſt in ratione compoſita ex duplicata proportione chordarum Parallaxium horizontalium Solis, ex terræ globo, & ex Lunæ globo, obſeruati; & ex duplicata proportione chordæ graduum 90 ad chordam parallaxeos horizontalis Lunæ.*

VIres (ſiue illuſtratio) omnium radiorum ſolarium in terram incidentium, ad vires omnium radiorum ſolarium in Lunam incidentium (ſi in æqualia ſpatia congregarentur) ſunt in ratione duplicata chordarum ſemiangulorum radioſorum, ſeu in terminis aſtronomicis, in ratione duplicata chordarum parallaxium horizontalium Solis, ex terræ globo, & ex Lunæ globo, obſeruati, vt in conſectario 1. 33. optic: promotæ eſt demonſtratum. Sed quoniam luna

existente plena, eodem modo illustratur terra à Lunæ hemisphærio radiante, quo illustraretur si vndique radiaret luna; supponamus vndique radiari lunam: supponimus etiam lunam radios solares absque vlla debilitatione & ex omni parte æqualiter reflectere. his suppositis, evidens est vires omnium radiorum solarium in terram incidentium ad semissem virium omnium radiorum lunarium esse in ratione duplicata chordarum parallaxium horizontalium solis ex terra & ex luna, supposito semper vtriusque radios in ęqualia spatia congregari: atque vires omnium radiorum lunarium sunt ad vires omnium radiorum lunarium in terram incidentium, in duplicata ratione chordarum, semicirculi & parallaxeos horizontalis lunæ, radiis scil. in spatia æqualia congregatis: & sumendo antecedentium dimidia, semissis viriũ omnium radiorum lunarium est ad vires omnium radiorum lunarium in terram incidentium, in duplicata ratione chordarum 90 graduum & parallaxeos horizontalis lunæ: patent ergo sequentes analogiæ; vires omnium radiorum solarium in terram incidentium sunt ad semissem virium omnium radiorum lunarium, in ratione duplicata chordarum parallaxium solis ex terra & ex luna horizontalium; deinde semissis virium omnium radiorum lunarium est ad vires omnium radiorum lunarium in terram incidentium, in duplicata ratione chordarum 90 graduum & parallaxeos horizontalis lunæ, radiis semper in æqualia spatia congregatis: at radii solares & lunares in terram incidentes in æqualia spatia congregantur, nempe terræ hemisphæria. Supponatur quoque terræ hemisphærium a semisse omnium radiorũ lunarium etiam illustrari, eruntque terræ hemisphęriorum, a radiis solaribus, a semisse omnium radiorum lunarium, & a radiis lunaribus sibi debitis, illustrationes, in eisdem rationibus cum viribus radiorum eadem hemisphęria illustrantium: proportiones igitur prædictæ ita se habent; illustratio terrę a sole est ad illustrationem terrę a semisse radiorũ

lunarium, in ratione duplicata chordarum parallaxium horizontalium solis ex terra & ex luna; deinde illustratio terrę a semisse radiorum lunarium est ad illustrationem terrę a luna in ratione duplicata chordarum 90 graduum & parallaxeos horizontalis lunę: at illustratio terrę a sole est ad illustrationem terrę a luna, in ratione composita ex proportione illustrationis terrę a sole ad illustrationem terrę a semisse radiorum lunarium, & ex proportione illustrationis terrę à semisse radiorum lunarium ad illustrationem terrę a luna; quę proportiones eędem demonstratę sunt cũ duplicata proportione chordarum parallaxium horizontalium solis ex terra & ex luna, & duplicata proportione chordarum 90 graduum & parallaxeos horizontalis lunæ, quod demonstrare oportuit.

Eodem prorsus modo demonstratur hoc generale Theorema.

*Quolibet planeta existente pleno; illustratio vel calefactio terræ à Sole est ad illustrationem vel calefactionem terræ ab illo planeta, in ratione composita ex duplicata ratione chordarum, parallaxium horizontalium solis, ex terra & ex prædicto planeta obseruati, & ex duplicata ratione chordæ graduum 90 ad chordam parallaxeos horizontalis illius planetæ.*

## *DE STELLARVM FIXARVM DISTANTIA.*

IN stellis fixis nulla obseruari potest parallaxis; & ideo de earum distantia multa absque vllo fundamento dicuntur; ego certe existimo illam esse maximam, neque fortasse absque omni ratione, sicut nunc patebit.

Certum est terram & omnes planetas esse corpora obscura & aliena sola luce fulgentia, item solem & omnia sidera fixa esse lucida & proprio tantum fulgore splendentia; hæc enim ex multis & certissimis phænomenis sunt manifesta. Cumque Sol & stellæ fixæ sint sola vniuersi corpora lucida,

cida, eiuſdem generis cenſeri poſſunt, ita vt Sol quodammodo dici poſſit ſtella fixa vicina; & ſtellæ, ſoles longinqui: hiſce conſideratis non erit probabile noſtram ſtellam fixam vicinam, ſeu Solem, inter tot millia eſſe omnium fixarum maximam & lucidiſſimam; poſſumus igitur haud abſurdè affirmare vnam ſaltem ſtellam fixam (nempe ſyrium, quæ nobis omnium maxima & lucidiſſima apparet) ipſum ſolem & in ſplendore & magnitudine æquare: atque ſyrius in ſplendore inferior eſt Ioui in ſitu acronychio, ſed vt euidentius fiat noſtrum propoſitum, ſupponamus lucem ſyrii luci Iouis eſſe æqualem: ſed lux ſolis eſt ad lucem Iouis in ſitu acronychio in ratione compoſita ex duplicata ratione chordarum parallaxium horizontalium ſolis ex terra & ex Ioue obſeruati, & ex duplicata ratione chordæ graduum 90 ad chordam parallaxeos horizontalis Iouis, vt patet ex antecedente; & ideo lux ſolis eſt ad lucem ſyrii in eadem ratione: parallaxis autem ſolis horizontalis ex terra obſeruati ſecundum pleroſque eſt $3'$: & ſemidiameter apparens Iouis in ſitu acronychio (hoc eſt parallaxis horizontalis terræ ex Ioue in ſitu acronychio obſeruatæ) eſt $22''$; cumque in hoc ſitu diſtantia terræ a ſole ad diſtantiam Iouis a ſole vulgo ſit vt 10 ad 52; erit diſtantia ſolis a Ioue ad diſtantiam terræ a Ioue, vt 52 ad 42; & proinde horizontalis parallaxis ſolis ex Ioue obſeruati eſt $18''$: cumque in paruis angulis arcus inter ſe ſint vt chordæ, chorda parallaxeos horizontalis ſolis ex terra obſeruati ad chordam parallaxeos horizontalis ſolis ex Ioue obſervati eſt in ratione $3'$ ad $18''$, ſeu ut 180 ad 18 vel vt 10 ad 1, cuius ratio duplicata eſt 100 ad 1. deinde chorda graduum 90 (poſito radio 100000) eſt 141421: cumque diſtantia Iouis a Sole ad diſtantiam terræ a Sole ſit in ratione 52 ad 10 & Solis parallaxis horizontalis ſit $3'$, manifeſtum eſt Iovis parallaxem horizontalem eſſe $35''$, cuius chorda eſt 17, poſito etiam radio 1000000; & ideo chorda graduum 90 eſt ad chordam parallaxeos horizontalis Iovis ut 141421

ad 17 seu ut 8319 ad 1, cuius ratio duplicata est 69205761 ad 1; illustratio igitur terræ a Sole est ad illustrationem terræ a Syrio in ratione cōposita ex proportione 100 ad 1 ex & proportione 69205761 ad 1, hoc est in ratione 6920576100 ad 1; cumque Sol & Syrius supponantur esse eiusdem magnitudinis & splendoris, manifestum est illustrationem terræ à Sole ad illustrationem terræ a Syrio esse in duplicata ratione chordarum semiangulorum radiosorum Solis & Syrii in terram, hoc est parallaxium Solis & Syrii ex terra horizontalium; & ideo chorda parallaxeos horizontalis Solis est ad chordam parallaxeos horizontalis Syrii in subduplicata ratione 6920576100 ad 1, seu in ratione 83190 ad 1, sed in his parvulis angulis chordæ inter se sunt ut sinus, sinus ergo parallaxes horizontalis solis est ad sinum parallaxeos horizontalis Syrii, vt 83190 ad 1, sed Sol & Syrius eiusdem supponuntur magnitudinis, & ideo eorum distantię à terra inter se sunt in reciproca ratione sinuum parallaxium horizontalium; & proinde distantia Syrii a terra ad distantiam Solis a terra est ut 83190 ad 1; & ideo distantia Solis a terra ad distantiam Syrii à terra non est in ratione sensibili, quod demonstrare oportuit.

Quod si assumatur parallaxis horizontalis Solis minor quam 3′ (certissimum enim est eam minorem esse vno minuto) magis adhuc insensibilis erit dicta proportio: Nos autē non existimamus omnes fixas æqualiter distare a Sole, nam probabile est quarundem distātias aliarum multis vicibus superare. Existimet forte aliquis meum argumentum non concludere, quoniam fortassis omnes radii solares in Iovem incidentes ab eo non reflectuntur, sicut ego suppono: respondeo tamen argumentum esse à fortiore, quo enim pauciores supponuntur radii a Iove reflecti, eo magis insensibilis erit prædicta proportio, ut cuivis computanti patebit.

QVOD

## QVOD VISIO OPE TELESCOPII *vel microſcopij non ſit fallax.*

Rerum opticarum non ſatis periti ſemper exclamant teleſcopia & microſcopia viſum ſolũmodo decipere & nihil verum & reale nobis monſtrare, neque evidentiſſimis experientiis omnino convinci poſſunt; & igitur ratione tentandum eſt illos ad veritatem revocare. Viſus fallacia poteſt duobus modis accipi, primò & valde impropriè, quando viſibile eodem modo videtur in vna diſtantia, quo in alia videri debet; hoc enim abſolute non poteſt dici viſus fallacia, etiamſi reſpectiue ad iſtam diſtantiam ita dici poterit, in alia enim diſtantia eſt vera & debita viſio: atque in hac acceptione viſio per teleſcopium vel microſcopium omnino eſt fallax. Secundo & propriè, viſus fallacia eſt quando viſibile vel eius pars aliqua non apparet in propria ſua figura, ſitu, & propriis ſuis coloribus tinctum: atque in hac acceptione nulla ineſt fallacia viſioni per teleſcopium vel microſcopium perfectum, quæ hominis viſioni perfectiſſimæ non ineſſe poteſt: in 50 enim & 51 opticæ promotæ geometricè demonſtratur, quod omnis viſio per lentes vel ſpecula, ſit viſio vera & realis in tali aſſignata diſtantia nudo oculo debita; ſi igitur nulla ſit fallacia in viſione oculi nudi, nec vlla erit in viſione per teleſcopium vel microſcopium, cum illæ viſiones demonſtrentur eſſe eędem. Sed dicet forte aliquis teleſcopium vel microſcopium repræſentare aliquando viſibile in ſitu euerſo, ſed oculus ita nunquam facit, ergo: reſpondeo in hoc caſu teleſcopium vel microſcopium repræſentare viſibile eodem modo quo appareret oculo nudo & everſo in tali aſſignata diſtantia, vt facilè videtur ex 50 & 51 opt. prom: ſiue enim obiecti, ſivè oculi euerſio, nihil mutat, præter merum ſitum quo ad nos, nec in viſione nec in viſibili.

## QVOD OMNE VISIBILE IN *infinitum sit divisibile.*

SI visibile in infinitum non sit divisibile, accipiatur minima eius pars, quæ ex opt: prom: 55 vel 56 oculo repræsentetur in angulo aliquo visorio sensibili ex. g. 20 graduum; atque oculus percipit visibile in angulo visorio 20 graduum in multas partes diuisibile, & proinde apparet hæc minima visibilis pars oculo in multas partes divisibilis; cumque natura homini non det oculos fallaces, & nec telescopium nec microscopium visum prębeat magis fallacem quam ipse oculus; necessario sequitur quod ista minima pars sit realiter diuisibilis, quod est absurdum, ponitur enim indivisibilis; & igitur non potest dari visibilis pars minima, est igitur omne visibile in infinitum divisibile, quod demonstrare oportuit.

## DE OBSERVATIONE SIMILITVDInis inter Terram & Lunam.

HIsce temporibus magna est controuersia, num Lunæ globus sit ex terra & aqua, sicut noster hic globus terrestris; quæ facili experientia sit dirimi potest. Sit telescopium cuius lens obiectiua in latitudine ad minimum continens centies diametrum uveæ obseruatoris, ex vna parte plana & ad alteram convexa ex diametro 50 palmorum; sitque eius ocularis plana ex vna parte & ex altera $\frac{1}{2}$ palmi conuexitatis. Huius telescopii ope videbitur Luna (supposita eius à terra distantia 240000 mille passuum) omnino sicut ex distantia 2400 mille passuum. Deinde in loco aliquo eminentissimo (ex quo videri possunt maria, montes, prata, lacus, saxa, omnia vastissima, ad distantiam 40 mille passuum) & sub tecto vasto ad vltimum obscurato, dempto vno solum-

lummodo parvo foramine versus prædicta maria, montes, &c, a descripti telescopii lente oculari impleto, per quam obseruentur antedicta maria, montes, &c. (dum à Sole fortiter illustrantur) ab oculo 61 palmis distante à lente, videbuntur omnino sicut ex distantia 2400 mille passuum, ex qua etiam distantia videbatur Luna; & proinde similitudines & dissimilitudines inter Lunam & Terram ab obseruatoribus videri poterunt. Huius praxeos demonstratio est ex opticæ promotæ 50 & 51; ex illis enim deducitur æqualis distantia & illustratio distantię debita vtriusque visibilis, & est in utroque aliqua vitri tinctura. Sed dicet aliquis lunam hac ratione plus habere tincturæ vitreæ quam terra, quoniam illius radii duo penetrant vitra, huius vero solummodo, vnum; cui facile medetur, addendo in observatione terræ vnum vitrum ex vtraque parte planum eiusdem cum lente telescopii obiectiua crassitiei, ad alteram lentem ex parte plana iunctum; dicet adhuc aliquis vapores terrestres, vel terræ obseruationem omnino impedire, vel saltem eius colores mutare: respondeo quod terra obseruari debeat e loco altissimo & tempore sereno, & Luna dum prope horizontem existit, vt idem semper in vtraque obseruatione defectus adsit. hisce consideratis, si luna appareat terra splendidior; dicendum est Lunam terra esse candidiorem & omnino opacum, quoniam nigredo & diaphaneitas reflectionis vires impediunt: Si vero contrarium videatur, contraria ferme sunt iudicanda: si eadem in vtraque obseruatione appareant phænomena, nulla ratio nos docet telluris & Lunæ materias esse diuersas. Eadem quoque methodo potest experientia fieri de similitudine inter duos quoslibet planetas, inter Solem & Stellas fixas, inter nubes & cometas.

*FINIS.*